VALORACION DE OPCIONES: UN CAMINO SEGURO PARA OBTENER UN PREMIO NOBEL DE ECONOMIA

Dr. Eliseo Martínez H.
Director Depto. Matemática y Computación
Sr. Wilson Rodríguez C.
Ing. Civil Industrial. Académico Area Industria

La Teoría de Opciones tiene una larga historia: El primer estudio científico fue realizado en 1900 por el Francés Louis Bachelier, que fue el pionero en la teoría de los Procesos Estocásticos, pero su trabajo permaneció olvidado por los economistas y profesores de Finanzas durante más de 50 años. Poco después de Bachelier, Einstein también trabajo con procesos estocásticos en la formulación del movimiento Browniano. En los años setenta, muchos estudiosos trataron de hallar una fórmula para valorar las opciones aunque con un éxito parcial. Por ejemplo Williams Sharpe desarrolló un método muy sencillo y simple denominado Método Binomial siendo el pionero en desarrollar una metodología que no aplicaba los modelos estocásticos complejos en la valoración de opciones (años más tarde (1990) Sharpe obtiene el Premio Nobel de Economía). Anteriormente hubo muchos intentos en desarrollar una metodología más compleja que permitiera una valoración del precio de las opciones con menor incertidumbre, hasta que Fischer Black y Myron Scholes publicaron un artículo en Mayo de 1973 en la revista The Journal of Political Economy, titulado "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". La fórmula elaborada por estos economistas Norteamericanos permitió cambiar la dinámica del mercado de derivados financieros y a su vez, permitió a Myron Scholes obtener el Premio Nobel de Economía de 1997. Expertos sostienen que la fórmula al dar un valor más acertado a estos instrumentos y al estar incorporadas en todas las calculadoras de los operadores e inversionistas en el mundo, ha originado un explosivo crecimiento del mercado de los futuros y opciones, los cuales se transan varios miles de millones de dólares en el mundo. Esto ocurrió producto que dicho artículo originó una explosión de trabajos que utilizan la teoría propuesta para valorar opciones más complicadas, otros instrumentos financieros, y para resolver muchos otros problemas.

El presente artículo pretende mostrar que los trabajos de Sharpe y Scholes pueden converger a una misma solución llegando de esta forma a la famosa ecuación publicada por primera vez en The Journal of Political Economy en 1973. Por otra parte, este artículo también pretende mostrar la importancia que tienen las matemáticas en el desarrollo de los modelos económicos, por lo cual sugerimos al lector hacerse de una dosis de calma y paciencia, de otro modo será difícil que pueda seguir la demostración.

Descripción de una Opción de Compra

La Adquisición de una opción de compra (call) sobre un determinado bien concede al poseedor de este instrumento el derecho a comprar el bien a un precio fijo a quien le vendió la call, ya sea en una fecha predeterminada o antes de la misma en algunos casos. Aquellas opciones que pueden ser ejercidas solo en el vencimiento reciben el nombre de opciones Europeas, pero si pueden ejercerse antes de dicha fecha se denominan opciones Americanas. La fecha fijada como límite para ejercer el derecho, es conocida como fecha de expiración o vencimiento y el precio que el comprador de la call le exigirá al vendedor del instrumento se denomina precio de ejercicio o strike price.

Evidentemente al comprador de una call le agradará que el mercado tenga precios del bien por sobre el strike price pactado con el vendedor en la fecha de expiración de la call, ya que de esta forma estará comprando un bien barato con relación al mercado, es decir obtendrá beneficios. En el caso contrario en que el precio del mercado sea menor al strike price pactado con el vendedor, entonces el comprador no hará uso de la call (opción de compra) y comprará el bien en el mercado, la pérdida que tendrá en esta operación el comprador es el valor que pagó por la call, comúnmente denominado prima.

Si el comprador de una call se encuentra en una situación favorable en la fecha de expiración de la call, es decir el precio del mercado es mayor al strike price, entonces el vendedor deberá desembolsar la diferencia entre el precio del mercado y el strike price al poseedor de la call. Dicha obligación es controlada por una cámara de compensación que resguarda el cumplimiento de las obligaciones de los compradores y vendedores a través de la exigencia de garantías a ambos participantes, de esta forma se puede decir que estos instrumentos presentan una gran liquidez. Otro atractivo que tiene esta operación es el alto apalancamiento que proporciona al comprador, puesto que puede obtener grandes ganancias con pequeños desembolsos iniciales.

Dependiendo del activo objeto, sobre el cual se basan las opciones, estas pueden ser:

Opciones sobre activos físicos ("commodities")

Opciones sobre instrumentos financieros

Opciones sobre acciones

Opciones sobre índices de acciones

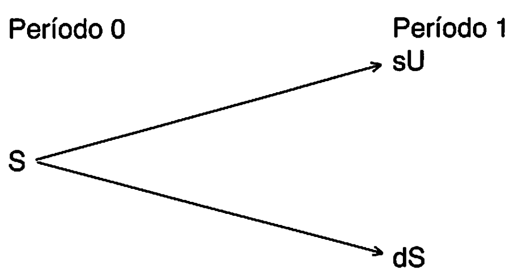
Opciones sobre bonos (tasas de interés)

Opciones sobre monedas extranjeras

Opciones sobre contratos de futuros

Valoración de un Opción de Compra sobre acciones

Supongamos que se emitirá una opción de compra sobre una acción que actualmente tiene un precio S, y la expiración será en 1 período. El modelo binomial considera que el valor de la acción al final del período tiene dos posibilidades uS y dS Con u > d) tal como lo muestra la siguiente figura:



Suponiendo esas condiciones para el activo subyacente, entonces la call puede tomar igualmente dos valores al término del período, tal como lo muestra la siguiente figura.

$\mathrm{Max}(0, uS - K) = C_u$
$\mathrm{Max}(0, dS - K) = C_d$

K: Precio de ejercicio del activo subyacente (en el caso es la acción que se transa en la opción).

Período 0 — Período 1

$$C \begin{cases} \nearrow \ \text{Máx}(0,uS - K) = C_u \\ \searrow \ \text{Max}(0,dS - K) = C_d \end{cases}$$

La pregunta que hay que formularse es ¿Cuánto es el valor de la opción en el inicio del período?, Es decir ¿Cuánto es el valor de C?.

Para solucionar este problema se determina un portfolio compuesto por una calidad X de un instrumento riesgoso y un instrumento libre de riesgo. Para tal efecto se elige, el propio activo subyacente (la acción) y bonos libre de riesgo. Es decir el portfolio tendrá la siguiente estructura: $xS + B$

Establecemos como requisito a este portfolio, que tenga los mismos flujos de caja que la call, de esta forma se podrá saber qué cantidad del activo riesgoso y sin riesgo debe tener el portfolio. Para tal efecto, consideraremos que el activo sin riesgo tiene una rentabilidad r en el período.

Matemáticamente este problema se soluciona con las siguientes ecuaciones.

$$XuS + rB = Cu$$
$$XdS + rB = Cd$$

La solución a esta ecuación se obtienen los siguientes valores para X y B:

$$X = \frac{(C_u - C_d)}{(u - d)S}$$

$$B = \frac{(C_u - C_d)}{(u - d)r}$$

Como no puede ver arbitraje en la venta de la call, entonces el valor de la opción (C) al inicio del período, no puede ser superior ni inferior al portfolio definido, ya que de otra forma permitiría obtener ganancias sin riesgo a un inversionista comprando el instrumento más barato y vendiendo el instrumento más caro. Es decir el modelo de valoración de opciones es un modelo de arbitraje y no de equilibrio de riesgo.

De esta forma el valor de la opción es fácil conocer

$$C = xS + B$$

$$C = \frac{1}{r}\left[\frac{(r - d)}{(u - d)} C_u + \frac{(u - r)}{(u - d)} C_d\right]$$

Si hacemos

$$p = \frac{(r - d)}{(u - d)}$$

Entonces

$$C = \left(\frac{1}{r}\right)[pC_u + (1 - p)C_d]$$

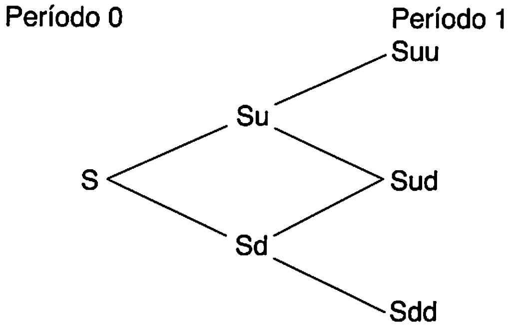
Ec. 1

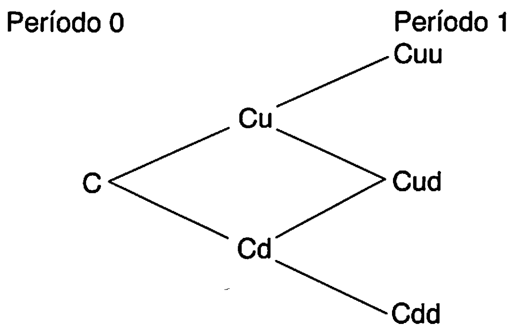
De otro modo, el valor de una call para un inversionista sin riesgo es el valor actual neto de un instrumento financiero que produce un flujo Cu con probabilidad p, y Cd con una probabilidad (1-p).

Método Binomial para 2 períodos

Evidentemente describir el comportamiento del precio de una call suponiendo que en el intervalo de tiempo en que expira la opción el activo subyacente presenta sólo una modificación es un escenario poco realista. De esta forma cuanto mayor sea el número de divisiones del intervalo de tiempo de expiración de la call más realista será el valor determinado para ésta. Para explicar la valorización de la call para 2 períodos se aplica la misma metodología para un período, con la diferencia que el intervalo está dividido en 2 período y no en uno.

El esquema siguiente muestra la variación que puede experimentar el precio del activo subyacente y la call respectivamente.





$Cuu = Max(0, u^2S - K)$
$Cud = Max(0, udS - K)$
$Cdd = Max(0, d^2S - K)$

Si se aplica la misma metodología utilizada en el cálculo del precio con un período se obtiene:

$$Cu = \left(\frac{1}{r}\right)[pCuu + (1-p)Cud] \qquad Xu = \frac{[Cuu - Cud]}{[(u-d)uS]}$$

$$Cd = \left(\frac{1}{r}\right)[pCdu + (1-p)Cdd] \qquad Xd = \frac{[Cdu - Cdd]}{[(u-d)dS]}$$

$$C = \left(\frac{1}{r}\right)[pCu + (1-p)Cd] \qquad X = \frac{[Cu - Cd]}{[(u-d)S]}$$

Xu representa la cantidad de acciones riesgosas que se deben comprar al final del primer período para formar un portfolio que tenga los mismos flujos que la call. Esto es en el caso que el precio del activo subyacente aumentara en el primer período.

X es la cantidad de acciones riesgosa que se deben comprar al inicio del primer período para formar un portfolio con que tenga los mismos flujos que la call al final del primer período.

De esta forma el valor de la call que debe tomar al inicio del primer período resulta considerando los valores de Cu y Cd, e introduciéndola en la Ec. 1.

$$C = \left(\frac{1}{r}\right)[p^2Cuu + 2p(1-p)Cud + (1-p)^2Cdd]$$

Esta ecuación se modificará para obtener una ecuación que permita fácilmente determinar el valor de una call en n período

$$C = \left(\frac{1}{r^2}\right)\sum_{j=0}^{j=2}\frac{2!}{j!(2-j)!}[p^j(1-p)^{2-j})C_j$$

Cj es el valor que tomará la call luego que el activo subyacente tenga j subidas de precio y (2–j) bajadas.

Como se mencionó anteriormente el modelo de valoración se perfecciona considerando una mayor división en período del tiempo que transcurre en expirar la call. De esta forma se dividirá el tiempo total en n períodos, para el cual el valor de la call queda expresado de la siguiente forma.

$$C = \left(\frac{1}{r^n}\right)\sum_{j=0}^{j=n}\frac{n!}{j!(n-j)!}[p^j(1-p)^{n-j})C_j$$

Por otra parte, transcurridos n movimientos de precios Cj toma el siguiente valor:

$Cj = Max(0, u^jd^{n-j}S - k)$

Evidentemente Cj tomará valores positivos mayores a 0 después de cierta cantidad de movimientos ascendentes del precio del activo subyacente, valor que denominaremos z.

Utilizando la siguiente ecuación se determina el menor valor para z.

$u^x d^{n-x} S = k$

Aplicando logaritmos arroja el siguiente valor para X:

$$x = \frac{\left[Ln \left(\frac{K}{Sd^n} \right) \right]}{\left[Ln \left(\frac{u}{d} \right) \right]}$$

Luego

$Z = || x || + 1$

De esta forma la call tendrá un valor positivo cuando se produzcan una cantidad de movimientos ascendentes mayores a Z, en caso contrario los Cj tomarán un valor de 0.

$$C = \left(\frac{1}{r^n} \right) \sum_{j=z}^{j=n} \frac{n!}{j!(n-j)!} [p^j(1-p)^{n-j}](u^j d^{n-j} S - k)$$

$$C = \left(\frac{1}{r^n} \right) \sum_{j=z}^{j=n} \frac{n!}{j!(n-j)!} [p^j(1-p)^{n-j}] u^j d^{n-j} S$$

$$- \left(\frac{K}{r^n} \right) \sum_{j=z}^{j=n} \frac{n!}{j!(n-j)!} [p^j(1-p)^{n-j}]$$

Separando esta última ecuación en dos sumando resulta lo siguiente:

Para continuar con la demostración se recordará que una distribución binomial tiene la siguiente forma:

$$Bin(z;n;p) = \sum_{j=z}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} [p^j(1-p)^{n-j}]$$

Introduciendo la distribución binomial en la expresión del valor de C se tiene:

$$C = Sbin(z;n;p^*) + \left(\frac{K}{r^n}\right) Bin(z;n;p)$$

Ec.2

Donde

$$p = \frac{(r-d)}{(u-d)}$$

$$p^* = \frac{u}{r} p$$

$z = || x || + 1$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{K}{Sd^n}\right)}{\ln\left(\frac{u}{d}\right)}$$

Aplicando un poco de Algebra y utilizando el teorema Central del Límite en la ec.2 permiten demostrar que cuando n tiende a infinito el valor de la opción cambia a la siguiente expresión:

Ec.3

$$C = SN(y) - \frac{K}{r^t} N(y - \sqrt{t})$$

siendo

$$y = \frac{\ln\left(\frac{S}{Kr^{-t}}\right)}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}$$

N(y) es probabilidad acumulada hasta el valor y de una distribución normal con media o y desviación estándar 1.

La ecuación 2 fue determinada por Williams Sharpe y la ecuación 3 determinada por los profesores Fisher Black y Myron Scholes. Ambos modelos para valorizar opciones consideran los mismos supuestos, la diferencia se encuentra en la distribución de probabilidades que le asignan al precio del activo subyacente. Sharpe consideró una distribución binomial mientras que Black y Scholes consideraron una distribución normal, y evidentemente al dividir el tiempo de expiración de la call en infinitos períodos ambas soluciones convergen, como se pudo demostrar en este artículo. Se debe mencionar también que la fórmula de Black y Scholes no es una derivación del método binomial, ya que para su desarrollo se utilizó un camino más complejo como es la formulación de un modelo estocástico. Pero aplicando el Teorema del Límite Central evidentemente se llega al mismo resultado obtenido por el modelo binomial.