REVISTA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA
www.ingenieria.uda.cl
17 (2004) 4-7

Una Extensión del Modelo Log-Skew-Normal

Juan M. Astorga[1], Héctor W. Gómez[2]

1. Instituto Tecnológico, Universidad de Atacama, Chile.
2. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ingeniería, Universidad de Atacama, Chile.

Correspondencia autor, Tel: 56-52-206646, E-mail: **jastorga@instec.uda.cl**, **hgomez@matematica.uda.cl**

Resumen

En este artículo presentamos un nuevo modelo, que es una extensión del modelo log-skew-normal introducido y utilizado por Azzalini y otros (2003) en el estudio de ingresos de rentas en familias norteamericanas, estudiamos sus propiedades básicas, mostramos el comportamiento gráfico y lo comparamos con el modelo log-skew-normal.

Palabras claves: Confiabilidad, Distribución Log-Skew-Normal.

Abstract

In this paper, we introduce a new model, that is an extension of Azzalini's log-skew-normal model, introduced and used by Azzalini et al. (2003) in the study of the U.S. family income data. We study the basic properties, we show the graphical behavior and we also compare with the log-skew-normal model.

Keywords: Log-Skew- Normal Distribution, Reliability

1. Introducción.

La confiabilidad en los sistemas eléctricos tiene gran influencia en la planificación de los sistemas de potencia. Para modelar la función de confiabilidad se usan distribuciones Weibull, Gamma y Log-Normal. Recientemente se ha introducido la distribución Log-Skew-Normal, basada en el modelo Skew-Normal introducido por Azzalini(1985).

Por otro lado, Arellano-Valle, Gómez, Quintana (2004), presentan una extensión de la distribución Skew-Normal, ésta extensión es llamada distribución Skew-Normal-Generalizada, y su función densidad se define como:

$$f(x|\lambda_1,\lambda_2)=2\phi(x)\Phi\left(\frac{\lambda_1 x}{\sqrt{1+\lambda_2 x^2}}\right) \quad [1]$$

Donde ϕ y Φ son la densidad $N(0,1)$ y su función de distribución, respectivamente, y $\lambda_1 \in$ R, $\lambda_2 \geq 0$ son los parámetros de asimetría.

Si X tiene densidad como en [1] se dice que X es una variable aleatoria Skew-Normal-Generalizada y se denota por $X \sim SNG(\lambda_1,\lambda_2)$.

Algunas propiedades de esta densidad son:

$SNG(\lambda_1=0, \lambda_2) = N(0,1)$ [2]

$SNG(\lambda_1, \lambda_2=0) = SN(\lambda_1)$ [3]

Donde $SN(\lambda_1)$ es el modelo Skew-Normal.

Ahora, Azzalini, Cappello y Kotz (2003) introducen y utilizan el modelo Log-Skew-Normal en el estudio de ingresos de rentas en familias norteamericanas. Y su función densidad es:

$$f(x|\lambda)=\frac{2}{x}\phi\left(ln(x)\right)\Phi\left(\lambda(ln(x)\right) \quad [4]$$

[4] corresponde a la distribución Log-Skew-Normal y se denota por $X \sim LogSN(\lambda)$.

En este artículo formulamos una extensión de la distribución Log-Skew-Normal. Al extender ésta distribución, usando el modelo *SNG,* se logra mayor flexibilidad en la asimetría.

El artículo se desarrolla de la siguiente manera, en la sección II entregamos la definición de la distribución Log-Skew-Normal-Generalizada. En la sección III mostramos algunas propiedades básicas de este nuevo modelo. En la sección IV, se muestra una serie de figuras de la distribución y se compara con el modelo LogSN. Finalmente, en la sección V se dan algunas conclusiones.

2. Extensión de la Distribución Log-Skew-Normal

En esta sección damos la definición de la distribución Log-Skew-Normal-Generalizada y hacemos algunos comentarios.

Definición 1.

La función de densidad Log-Skew-Normal-Generalizada es:

$$f(x|\lambda_1,\lambda_2)=\frac{2}{x}\phi(ln(x))\Phi\left(\frac{\lambda_1 ln(x)}{\sqrt{1+\lambda_2(ln^2(x))}}\right) \quad [5]$$

Donde ϕ y Φ son la densidad $N(0,1)$ y su función de distribución, respectivamente, y $\lambda_1 \in$ R, $\lambda_2 \geq 0$ son los parámetros de asimetría.

Si X tiene densidad como en [5] se dice que X es una variable aleatoria Log-Skew-Normal-Generalizada y se denota por $X \sim LogSNG(\lambda_1,\lambda_2)$.

Comentarios

En la definición 1 se muestra un modelo más flexible que el modelo LogSN, el parámetro λ_2 hace que este nuevo modelo sirva para modelar conjuntos de datos con mayor flexibilidad que el modelo LogSN.

3. Propiedades Básicas

Las siguientes propiedades se obtienen en forma inmediata desde la definición 1

Proposición 1

1. $f(x|\lambda_1, \lambda_2 = 0) = \frac{2}{x}\phi(ln(x))\Phi(\lambda_1 ln(x))$

2. $f(x|\lambda_1 = 0, \lambda_2) = \frac{1}{x}\phi(ln(x))$

3. Si $X \sim LogSNG(\lambda_1, \lambda_2)$ entonces

$Y = log(X) \sim SNG(\lambda_1, \lambda_2)$

4. Si $\lambda_2 = \lambda_1^2$ en [5], entonces obtenemos el modelo Log-Skew-Normal-Curvado.

Comentarios

El primer resultado de la Proposición 1, nos dice que nuestro modelo contiene al modelo log-skew-normal estudiado por Azzalini, Cappello y Kotz (2003), el segundo resultado muestra que esta nueva extensión contiene al modelo log-normal.

El tercer resultado nos muestra la representación necesaria para obtener la extensión del nuevo modelo y el cuarto resultado, establece que este nuevo modelo también contiene a un modelo que se puede emplear en confiabilidad y que su nombre se debe a que este es una transformación del modelo skew-normal-curvado introducido por Arellano-Valle, Gómez y Quintana (2004).

4. Gráficos de la Densidad

A continuación, se muestra una serie de gráficos de la nueva densidad y se compara con modelos conocidos en la literatura estadística.

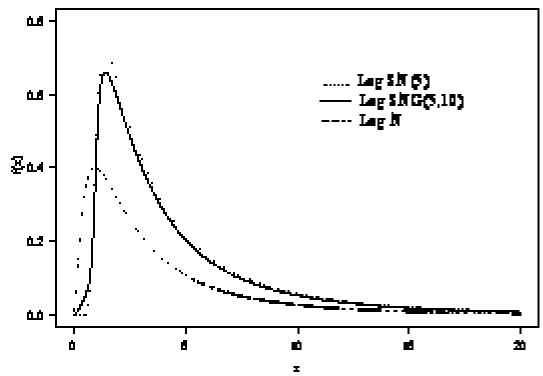

Figura 1

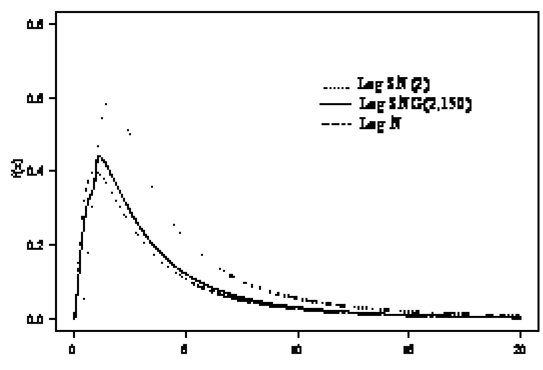

Figura 2

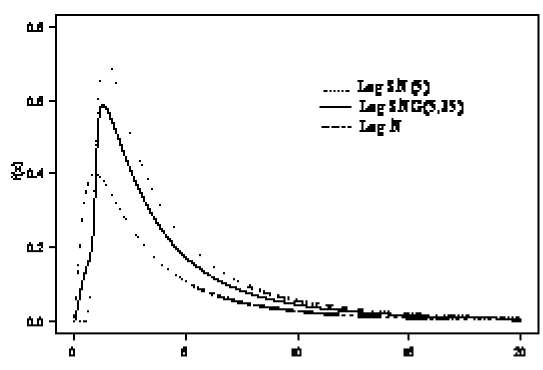

Figura 3

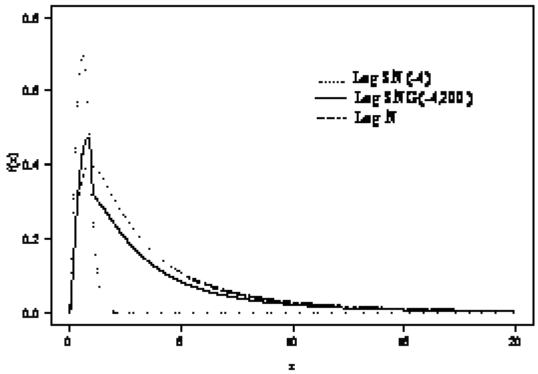

Figura 4

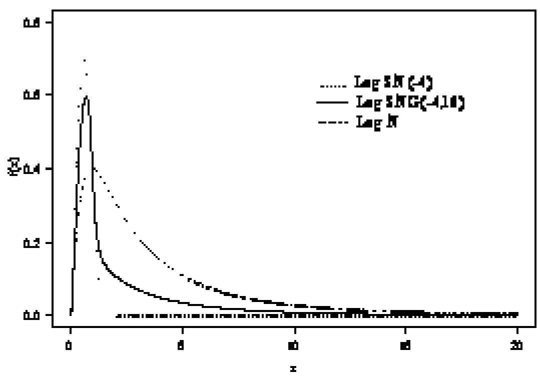

Figura 5

Comentarios

Las Figuras 1, 2 y 3 muestran que la distribución LogSNG tiende a las distribuciones LogSN y LogN, es decir, estas aproximaciones dependen de los valores de los parámetros de asimetría. Además, observamos que tiene distinta forma que las distribuciones antes mencionadas.

En las Figuras 4 y 5 observamos que cuando el primer parámetro de asimetría es negativo, la forma que tiene este modelo es similar a una mezcla de LogN. También podemos ver que la Figura 5 es una comparación del modelo LogSNC y los modelos LogSN y LogN.

5. Conclusiones

Este nuevo modelo que estamos introduciendo tiene mayor flexibilidad que el modelo LogSN y puede ser utilizado, por ejemplo, para modelar datos de sobrevivencia y confiabilidad.

6. Referencias

Revistas

Arellano-Valle, R. B., Gómez, H. W., Quintana, F. A. (2004). A New Class of Skew-Normal Distributions. Communications in Statistics: Theory and Methods. 33 (7) , 1465-1480.

Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. Scand J Statist. 12, 171-178.

Azzalini, A., Cappello, D., and Kotz, S.(2003). Log-skew-normal and log-skew-t distributions as models for family income data Journal of Incone Distribution. 11 , 12-20