REVISTA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA
www.ingenieria.uda.cl
17 (2004) 49-52

Bifurcación de Orbitas Periódicas en un Campo de Vectores Lineales por Partes

Francisco J. Torres[1]

1. Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad de Atacama, Copiapó, Chile.

E-mail: ftorres@matematica.uda.cl

Resumen

En este trabajo se discute la presencia de bifurcaciones en un campo de vectores lineales por partes a través de la existencia de órbitas periódicas, usando la derivada de la aplicación de Poincaré.

Palabras claves: Aplicación de Poincaré, Bifurcaciones, Campos de Vectores

Abstract

In this work the presence of bifurcations in a vector field linear piecewise through the existence of periodic orbits is discussed, using the derived one from the Poincaré map.

Keywords: Bifurcations, Poincaré Map, Vector Field

1. Introducción

Las definiciones básicas de campos de vectores, órbitas periódicas y aplicación de Poincaré están dadas [Torres]. El principal resultado es la obtención de condiciones sobre el sistema para caracterizar los diferentes tipos de bifurcación.

Definición: Se definen los planos

$$V_{\pm 1} = \left\{ x \in R^3 : \langle \alpha , x \rangle = \pm 1 \right\} \text{ con } \alpha = (1,0,0)^t$$

$$V_1^+ = \left\{ x \in V_1 : \langle \alpha , x \rangle > 0 \right\}$$

$$V_1^- = \left\{ x \in V_1 : \langle \alpha , x \rangle < 0 \right\}$$

$$V_{-1}^+ = \left\{ x \in V_{-1} : \langle -\alpha , x \rangle > 0 \right\}$$

$$V_{-1}^+ = \left\{ x \in V_{-1} : \langle -\alpha , x \rangle < 0 \right\}$$

Lema 1: Sea

$$\pi : V_1^- (y_3) \to V_1^-$$

La aplicación de Poincaré asociada al punto periódico y_3, con periodo $t_1 + s_1 + t_2 + s_2 + t_3 + s_3$, donde $V_1^- (y_3)$ es una vecindad de y_3 en V_1^-. Entonces la derivada de la aplicación de Poincaré $D\pi (y_3) : E \to E$

Donde

$$E = \left\{ x \in R^3 : \langle \alpha , x \rangle = 0 \right\}$$

es dada por

$$D\pi (y_3) = \left[I - \frac{A y_3 \alpha^t}{\alpha^t A y_3} \right] e^{Bs_3} e^{At_3} e^{Bs_2} e^{At_2} e^{Bs_1} e^{At_1}$$

Proposición: Sea x un punto periódico, con periodo $t_1 + s_1 + t_2 + s_2 + ... + t_n + s_n$. Entonces la derivada de la aplicación de Poincaré, es dada por

$$D\pi (x) = \left[I - \frac{A x \alpha^t}{\alpha^t A x} \right] e^{Bs_n} e^{At_n} ...... e^{Bs_1} e^{At_1}$$

Demostración: Generalizando el lema anterior se consigue el resultado.

2. Bifurcaciones

Definición. Sea x un punto periódico y sea $D\pi (x)$ la derivada de la aplicación de Poincaré en x. Entonces una bifurcación local ocurre cuando un autovalor está en el círculo unitario (complejo).
En particular.

Bifurcación silla-nodo si $D\pi (x)$ tiene un autovalor igual a 1.

Bifurcación doble periodo si $D\pi (x)$ tiene un autovalor −1.

Bifurcación de Hopf si $D\pi (x)$ tiene un par de autovalores complejos conjugados con valor absoluto igual a 1.

Lema 2:. Sean $M = e^{Bs_n} e^{At_n} ... e^{Bs_1} e^{At_1}$, $T = trM$ y $D = \det M$. Entonces Ax es un autovector de M asociado al autovalor 1.

Dem. Para el caso $n = 3$, $x = y_3$ y por lema 1, tenemos que

$$\begin{aligned} MAy_3 &= e^{Bs_3} e^{At_3} e^{Bs_2} e^{At_2} e^{Bs_1} e^{At_1} A y_3 \\ &= Ay_3 \end{aligned}$$

Pues, esta expresión es la aplicación de Poincaré asociada a la órbita del punto periódico y_3, y por lo tanto es un punto fijo. Estos argumentos son válidos para n arbitrario, así, tenemos que

$$MAx = Ax$$

entonces Ax es un autovector de M asociado al autovalor 1.

Proposición. El operador

$$L = \left[I - \frac{Ax\alpha^t}{\alpha^t Ax} \right]$$

es la proyección de R^3 sobre el plano $ortg(\alpha) = \{ x \in R^3 : \langle \alpha, x \rangle = 0 \}$.

Dem. $R^3 = Ax \oplus ortg\alpha$

Sea $z \in R^3$ entonces $z = \gamma Ax + y$ donde $y \in ortg(\alpha)$ y como $\langle \alpha, y \rangle = 0$, tenemos que

$$\gamma = \frac{\langle \alpha, z \rangle}{\langle \alpha, Ax \rangle}$$

entonces

$$P_{Ax}(z) = z - \frac{\langle \alpha, z \rangle}{\langle \alpha, Ax \rangle} Ax = \left[I - \frac{\langle \alpha, \cdot \rangle}{\langle \alpha, Ax \rangle} Ax \right](z)$$

Luego

$$Lz = \left[I - \frac{Ax\alpha^t}{\alpha^t Ax} \right](z)$$

entonces

$$L = P_{Ax}$$

Así, se tiene el resultado.

Lema 3: Sean $(1, \lambda_2, \lambda_3)$ los autovalores de M asociados a los autovectores (Ax, v_2, v_3), entonces $(0, \lambda_2, \lambda_3)$ son los autovalores de $D\pi(x)$ asociados a los autovectores (Ax, u_2, u_3) donde $Lv_i = u_i, i = 2,3$.

Dem. $D\pi(x) = LM$ y como Ax es un autovector de M asociado a 1, tenemos

$$D\pi(x)Ax = LMAx = LAx = 0 = 0Ax$$

Pues $LAx = 0$.

Sea $v \in R^3$ entonces $v = \gamma Ax + Lv$, ahora

$$\begin{aligned} D\pi(x)v &= LM(\gamma Ax + Lv) = \gamma LMAx + LM(Lv) \\ &= \gamma LAx + LM(Lv) = LM(Lv) \end{aligned}$$

Así,

$$D\pi(x)v_2 = D\pi(x)(Lv_2)$$

Por otro lado

$$D\pi(x)v_2 = LMv_2 = L\lambda_2 v_2 = \lambda_2 Lv_2$$

Luego

$$D\pi(x)(Lv_2) = \lambda_2 Lv_2$$

esto es, Lv_2 es el autovector de $D\pi(x)$ asociado a λ_2.

En forma similar se obtiene que Lv_3 es el autovector de $D\pi(x)$ asociado a λ_3.
Estos resultados nos dan condiciones para para la siguiente caracterización.

Teorema: Sean M, T y D como en el lema 2 y x un punto periódico de $V_{\pm 1}$. Tenemos las siguientes propiedades.
a) Si existe un bifurcación silla-nodo entonces

$$2 - T + D = 0$$

Si existe una bifurcación de periodo doble entonces

$$T + D = 0$$

Si existe una bifurcación de Hopf entonces

$$D = 1 \text{ y } (1 - T)^2 - 4 < 0$$

Demostración: En este caso se tiene que $D\pi(x)$ tiene un autovalor igual a 1, entonces M tiene autovalores $(1,1,\lambda_3)$. Sea $h(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ el polinomio característico de M entonces

$$-c = 1 + a + b$$

Y

$$h(\lambda) = (\lambda - 1) f(\lambda)$$

Donde

$$f(\lambda) = \lambda^2 + (a+1)\lambda - c$$

Ahora $a = -T$ y $c = -D$, entonces

$$f(\lambda) = \lambda^2 + (1-T)\lambda + D$$

como 1 tiene multiplicidad 2, se tiene que

$$2 - T + D = 0$$

En este caso $D\pi(x)$ tiene un autovalor igual a −1 entonces M tiene autovalores $(1,-1,\lambda_3)$, $h(\lambda)$ dado en la parte (a) es el polinomio característico de M y −1 es autovalor, entonces

$$c = 1 - a + b$$

y

$$h(\lambda) = (\lambda + 1) f(\lambda)$$

Donde

$$f(\lambda) = \lambda^2 + (-T-1)\lambda - D$$

Como 1 es autovalor de M, tenemos que

$$T + D = 0$$

En este caso $D\pi(x)$ tiene dos autovalores complejos conjugados entonces M tiene autovalores $(1,\lambda,\overline{\lambda})$. $h(\lambda)$ es el polinomio característico de M y 1 es autovalor de M, entonces

$$h(\lambda) = (\lambda - 1) f(\lambda)$$

Donde,

$$f(\lambda) = \lambda^2 + (1-T)\lambda + D$$

$$D = 1\lambda\overline{\lambda} = 1$$

Como f tiene dos raices complejas conjugadas, Entonces

$$(1-T)^2 - 4 < 0$$

pues $D = 1$.

3. Referencias

Artículos

Arneodo, s. et al.(1981): Possible new.strong attractors with spiral structure. Commun. Math. Physics 79.

Chua, L. Et al. (1986): The double Scroll Famity
IEEE Transactions on Circuits and systems 33.

Komuro, M (1983): Normal forms of continuous piecewise linear vector field and attractors
Japan Journal of Applied Mathematical, 5

Torres, F (2003): Orbitas periódicas en un campo de vectores lineales por partes.
Revista de la Facultad de Ingeniería, Universidad de Atacama, Nº 16.

Libros

Arnold, V.(1985): Ecuacoes Diferenciais Ordinarias. MIR

Guckenheimer et al. (1983): Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and bifurcations of vector field. Springer-Verlag