



Modelos de Tiempo de Vida Aplicados al Análisis de Confiabilidad en Sistemas Eléctricos

Juan M. Astorga¹

1. Instituto Tecnológico, Universidad de Atacama, Chile

E-mail: jastorga@instec.uda.cl

Resumen

En este trabajo se presenta una descripción general del análisis de confiabilidad, se muestran los modelos de tiempo de vida más usados para aplicaciones en sistemas eléctricos, se comparan dichos modelos y se proponen otras distribuciones que pueden contribuir en el desarrollo de esta línea de investigación.

Palabras claves: Confiabilidad, Modelos de Tiempo de Vida.

Abstract

In this work a general description of the reliability analysis is introduced; furthermore, the most used life distributions are shown for applications in electric systems, such models are compared and other distributions which may contribute to the development of this research area are proposed.

Keywords: Life Distributions, Reliability

1. Introducción.

En este trabajo se propone la incorporación de nuevos modelos de tiempo de vida para el estudio de confiabilidad en sistemas eléctricos. El trabajo se desarrolla de la siguiente manera: En la sección 2 se introducen los conceptos generales de confiabilidad. En la sección 3 se muestran los índices de confiabilidad usados en sistemas eléctricos. En la sección 4 se describen los principales modelos de tiempo de vida y se introducen nuevas distribuciones. Finalmente, en la sección 5, se dan algunas conclusiones.

2. Generalidades sobre Confiabilidad

2.1 Características

La confiabilidad depende de variables que actúan en forma aleatoria, es decir, la confiabilidad se modela como una función de probabilidad. Variables como perturbaciones, fallas, capacidad, disponibilidad y mantenimiento, afectarán la confiabilidad de los sistemas.

Los datos que normalmente se analizan en modelos de tiempo de vida presentan censuras, covariables, cantidad de causas de muerte y número de eventos recurrentes.

2.1.1. Presencia de censuras

En sistemas industriales, habitualmente, la observación y consideración del total de datos no se realiza completamente, la censura considera este efecto. La tabla 1 describe los tipos de censuras.

Tipo	Característica
I	Las observaciones se realizan hasta un tiempo preestablecido. Algunos datos no son considerados.
II	El estudio termina después de una cierta cantidad de fallas previamente definidas.
Aleatorias	El estudio finaliza sin analizar la variable de interés
Por la izquierda y en intervalos	El hecho ocurre antes de la observación periódica, no se conoce el instante preciso de la censura.

Tabla 1: Tipos de censura

2.1.2. Presencia de covariables

Cuando intervienen otras variables distintas al tiempo y a las censuras, es necesario incluir covariables o variables explicativas que permitan ajustar el modelo a los datos reales.

2.1.3. Causas de muerte

La característica "causas de muerte" tiene mayor utilización en el análisis de sobrevivencia, en dicho campo se conoce como datos de riesgos competitivos.

2.1.4. Número de eventos recurrentes

El número de eventos recurrentes se relaciona con las censuras y con las covariables, ya que entrega información valiosa sobre la cantidad de veces que ocurre, por ejemplo, una falla durante el tiempo de estudio.

Es importante señalar que en el análisis de confiabilidad, al menos debe considerarse la presencia de censuras, covariables y el número de eventos recurrentes.

2.2. Funciones usadas en confiabilidad

2.2.1. Funciones $f(t)$, $R(t)$ y $h(t)$

La función de probabilidad $f(t)$, función de confiabilidad $R(t)$ y función de riesgo $h(t)$, son usadas para estudiar problemas de tiempo de vida.

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t)}{\Delta t} \tag{1}$$

(1) describe la función de densidad de probabilidad como el límite de probabilidad de la ocurrencia de una falla en el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t)$, por unidad de tiempo.

$$R(t) = P(T \geq t) = 1 - F(t) \tag{2}$$

(2) define la probabilidad que un sistema opere sin fallas hasta un determinado tiempo t . $F(t)$ representa la función de densidad de acumulada. Observe que: $R(0) = 1$; $R(\infty) = 0$ y

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$

La función de riesgo, describe como la probabilidad instantánea de falla se modifica al aumentar el tiempo. Esta función permite caracterizar clases especiales de distribuciones de confiabilidad, así, $h(t)$ puede ser creciente, decreciente o constante, y modelarse a través de distribuciones tipo Exponencial, Weibull o Log Normal. La probabilidad condicionada expresada en (3) puede reducirse a (4) relacionando (1) y (2).

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t} \tag{3}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \tag{4}$$

(5) expresa la relación que existe entre la función de confiabilidad y la función de riesgo.

$$R(t) = \exp \left(- \int_0^t h(t) dt \right) \tag{5}$$

Nótese que la selección conveniente de $f(t)$ permite estimar adecuadamente las funciones $R(t)$ y $h(t)$.

2.2.2. Tasa de fallas

Una de las funciones más importantes en el análisis de confiabilidad es la función "bathtub" o "tina de baño", ésta expresa la tasa de fallas $\lambda(t)$ en función del tiempo. Se distinguen 3 períodos: prematuro, vida útil y terminal.

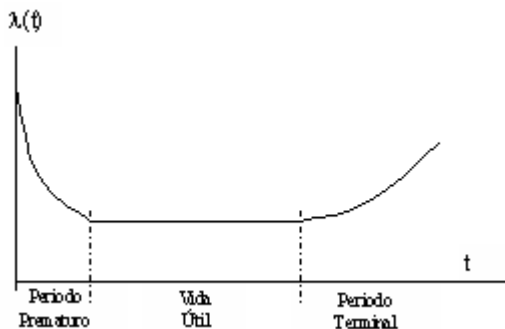


Figura.1: Función bathtub hazard o tina de baño

En el período prematuro el índice de fallas es elevado y la tasa de fallas es decreciente. Las fallas ocurren por errores de diseño o por problemas en el control de calidad. En el período llamado vida útil, las fallas son aleatorias y puede plantearse la probabilidad de ocurrencia de un evento indeseado. Este periodo es de especial interés para la planificación de programas de mantenimiento. En el tercer período, la tasa de fallas es creciente y se debe al desgaste acelerado de las componentes del sistema.

Sí T es una variable aleatoria positiva, entonces la expectativa de vida se define según (6)

$$E(t) = \int_0^{\infty} (1 - F(t)) dt \tag{6}$$

Reemplazando (2) y (5) en (6), se obtiene (7), que es la expectativa de vida para una función $h(t) = \lambda(t)$. La esperanza calculada según (7) da como resultado $1/\lambda$, que se interpreta como el tiempo medio para fallas por unidad de tiempo.

$$E(t) = \int_0^{\infty} \left[\exp \left(- \int_0^t \lambda(t) dt \right) \right] dt \tag{7}$$

3. Índices de Confiabilidad en Sistemas Eléctricos

Los índices de calidad de servicio que actualmente considera la ley eléctrica chilena, conlleva la aplicación de estudios de confiabilidad. Por ejemplo, el sector distribución eléctrica, estima la confiabilidad basándose en la continuidad del servicio.

3.1. Índices de confiabilidad aplicados en el sector distribución eléctrica.

3.1.1. Tasa de fallas $\lambda(t)$

Número de veces que un consumidor deja de recibir suministro de energía eléctrica en un período de tiempo determinado.

3.1.2. Tiempo de reparación $\mu(t)$

Es el tiempo promedio que dura una falla de suministro de energía eléctrica. Se expresa en horas.

3.1.3. Energía no suministrada

Este índice cuantifica la cantidad de energía que la empresa deja de vender, debido a una falla de suministro.

3.1.4. Carga promedio desconectada

Cuantifica la cantidad de consumidores que se ven afectados por el corte de suministro.

3.1.5. Tiempo anual de desconexión esperado

Se obtiene multiplicando la tasa de falla por su duración promedio y representa la indisponibilidad total del suministro de energía eléctrica durante un año.

3.2. Índices generales de confiabilidad

La naturaleza de estos índices puede clasificarse como se muestra en la tabla 2.

Clasificación	Índice
Probabilidades	Confiabilidad y disponibilidad
Frecuencias	Promedio de fallas por unidad de tiempo
Tiempos medios	Tiempo medio primera falla, tiempo medio entre fallas, duración media de fallas.
Esperanzas	Esperanza por energía no suministrada y por pérdida de suministro a los consumidores

Tabla 2.: Clasificación de índices de confiabilidad

Algunos índices descritos en la tabla 2 que se modelan como distribuciones de probabilidad son los siguientes:

3.2.1. Probabilidad de pérdida de carga (LOLP)

Mide la probabilidad que la carga de un sistema exceda la capacidad disponible de generación. Se calcula usando la curva de duración de carga, bajo la suposición que las cargas son constantes en intervalos de una hora.

3.2.2. Esperanza de pérdida de carga (LOLE)

Permite calcular el número esperado de días, en un período de tiempo específico, para el cual ocurre la pérdida de carga.

3.2.3. Esperanza energía no suministrada (EENS)

Representa el valor esperado de energía no suministrada a los consumidores.

Los índices señalados en los puntos 3.1 y 3.2 representan variables aleatorias en función del tiempo y pueden modelarse adecuadamente con distribuciones de tiempo de vida.

3.3. Disponibilidad

Sean las funciones $\lambda(t)$ y $\mu(t)$, la tasa de fallas y el tiempo de reparación respectivamente, entonces, la disponibilidad instantánea $A(t)$ de un sistema se define en la ecuación (8):

$$A(t) = 1 - \left[\exp[-Q(t)] \int_0^t \exp[Q(t)] \lambda(t) dt \right] \tag{8}$$

Donde $Q(t) = \int_0^t [\lambda(t) + \mu(t)] dt$

La disponibilidad media $\bar{A}(t)$ de un sistema se obtiene de la relación (9):

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t A(t) dt \tag{9}$$

Ejemplo: Supongamos que en un sistema las densidades para la tasa de fallas y tiempo de reparación se distribuyen exponencialmente, entonces, de (8) obtenemos:

$$\lambda(t) = \lambda, \quad \mu(t) = \mu, \quad Q(t) = (\lambda + \mu)t$$

$$A(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda (1 - \exp - (\lambda + \mu)t)}{(\lambda + \mu)^2 t}$$

Luego, cuando $t \rightarrow \infty$, obtenemos la disponibilidad en estado estacionario. (10) indica el valor $A(t)$ en estado estacionario para densidades distribuidas exponencialmente.

$$A(\infty) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \tag{10}$$

3.4. Mantenimiento preventivo

Los modelos de tiempo medio de deterioro de falla nacen como una extensión de los tiempos de reparación y reemplazo que se presentan en los programas de mantenimiento. La distribución Erlang, se usa con mucha frecuencia en modelos de mantenimiento que consideran la presencia de tiempos medio de deterioro de falla.

La ecuación (11) muestra la función de densidad para una variable que se distribuye Erlang. Decimos $T \sim \text{Erl}(\rho, r)$, si su densidad es:

$$\text{Erl}(t) = \frac{\rho^r}{\Gamma(r)} t^{(r-1)} \exp(-\rho t) \tag{11}$$

r y ρ , son los parámetros de forma y escala, respectivamente. Cabe destacar que la distribución Erlang, es un caso particular de la distribución Gamma.

4. Modelos de Tiempo de Vida en el Análisis de Confiabilidad

Las distribuciones Exponencial, Weibull, Erlang y Gamma son ampliamente usadas en modelos de tiempo de vida. Estos modelos pueden representar funciones de riesgo,

confiabilidad, disponibilidad, mantenimiento, entre otras.

Las distribuciones antes mencionadas y otras como el modelo Log Normal, pueden representarse en forma generalizada por medio de un modelo mayor. Dicho modelo se conoce como distribución Gamma Generalizada.

4.1. Distribución Gamma Generalizada

La ecuación (12) muestra la función de densidad de la distribución Gamma Generalizada.

$$g(t) = \frac{\beta}{\Gamma(k)\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{k\beta-1} \exp - \left(\frac{t}{\theta}\right)^\beta \tag{12}$$

θ representa el parámetro de escala; k y β son los parámetros de forma.

La parametrización mostrada en (13) permite escribir la función Gamma Generalizada según (14).

$$\mu = \ln(\theta) + \frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{1}{\alpha^2}\right); \quad \sigma = \frac{1}{\beta\sqrt{k}}; \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{k}} \tag{13}$$

$$g(t) = \begin{cases} \frac{|\alpha|}{\sigma t \Gamma\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)} \exp\left[\frac{-\left[\frac{\ln(t/\theta) - \mu}{\sigma}\right]^2 + \frac{1}{\alpha^2} - \exp\left[-\left(\frac{\ln(t/\theta) - \mu}{\sigma}\right)^\beta\right]}{\sigma^2}\right] & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\left[\frac{\ln(t/\theta) - \mu}{\sigma}\right]^2}{2}\right] & \text{si } \alpha = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Comentarios:

Según (14) observamos lo siguiente:

- Sí $\alpha=0$, entonces $g(t)$ es Log Normal
- Sí $\alpha=\sigma$, entonces $g(t)$ es Gamma
- Si $\alpha=1$ y $\sigma=1$, entonces $g(t)$ es Exponencial
- Sí $\alpha=1$, entonces $g(t)$ es Weibull ($\sigma>1, \sigma=1$ y $\sigma<1; \beta<1, \beta=1$ y $\beta>1$)

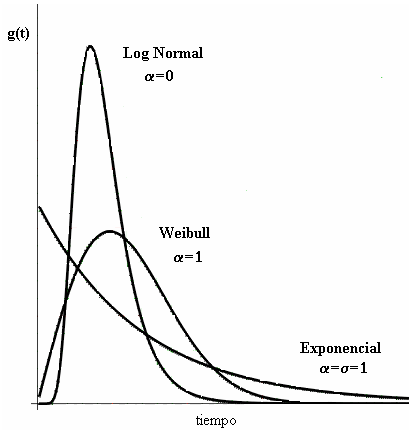


Figura 2: Distribución Gamma Generalizada

La función de confiabilidad $R(t)$, para la densidad definida en (14), se presenta en (15).

$$R(t) = \begin{cases} 1 - \Gamma_I \left(\frac{\exp \left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma} \right)}{\alpha^2}; \frac{1}{\alpha^2} \right) & \alpha > 0 \\ 1 - \Phi \left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma} \right) & \alpha = 0 \\ \Gamma_I \left(\frac{\exp \left(\alpha \left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma} \right) \right)}{\alpha^2}; \frac{1}{\alpha^2} \right) & \alpha < 0 \end{cases} \quad (15)$$

Claramente, la razón entre (14) y (15), genera la función de riesgo $h(t)$, conocida en sistemas eléctricos como tasa de falla $\lambda(t)$.

4.2. Distribución Skew Normal

Azzalini [4], introduce una nueva distribución llamada Skew Normal y su densidad es:

$$\phi(x; \lambda) = 2\phi(x) \Phi(\lambda x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (16)$$

Donde ϕ y Φ son la densidad normal estándar $N(0,1)$ y su función de distribución respectivamente. λ es el parámetro de asimetría.

Si X tiene una densidad como en (16) se dice que X es una variable aleatoria Skew Normal y se denota por $X \sim SN(\lambda)$.

Algunas propiedades de la distribución Skew Normal, son las siguientes:

- $SN(\lambda=0) = N(0,1)$

- Sí $\lambda \rightarrow \infty$, entonces, $\phi(x, \lambda)$ tiende a Half Normal
- Sí $X \sim SN(\lambda)$, entonces, $-X \sim SN(-\lambda)$

4.3. Distribución Log Skew Normal

Azzalini, Dal Cappello y Kotz [5], introducen y utilizan el modelo Log Skew Normal en el estudio de ingresos de rentas en familias norteamericanas. Su función de densidad es:

$$f(x|\lambda) = \frac{2}{x} \phi(\ln(x)) \Phi(\lambda(\ln(x))) \quad ; \quad x > 0 \quad (17)$$

(17) corresponde a la distribución Log Skew Normal y se denota por $X \sim \text{LogSN}(\lambda)$.

Debido al parámetro de asimetría (λ), que se incorpora en la distribución Log Skew Normal, se logra mayor flexibilidad con respecto a la distribución Log Normal.

Si $X \sim \text{LogSN}(0)$, se obtiene la distribución Log Normal, este comportamiento se muestra en la figura 3.

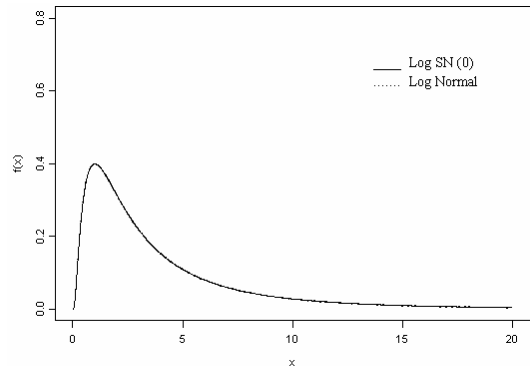


Figura 3: Función de densidad Log SN (0)

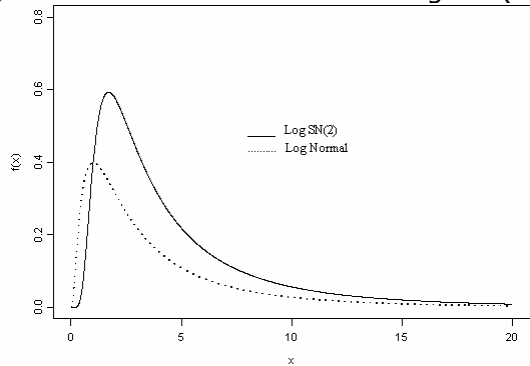


Figura.4: Funciones Log SN (2) v/s Log Normal

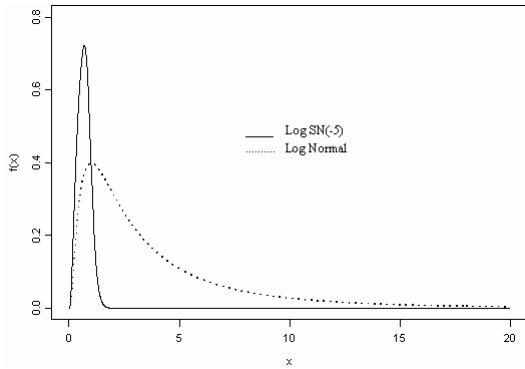


Figura 5: Funciones Log SN (-5) v/s Log Normal

Comentarios:

La figura 3, muestra que la distribución Log SN contiene a la distribución Log Normal. Las figuras 4 y 5, muestran el efecto del parámetro de asimetría. Nótese que la distribución Log SN considera datos que no son rescatados por la distribución Log Normal.

La distribución Gamma Generalizada representa modelos de confiabilidad cuyas funciones de densidad son Exponencial, Weibull, Gamma, Erlang o Log Normal; pero si un conjunto de datos se comporta como en las figuras 4 y 5, la distribución Gamma Generalizada no sería representativa.

Por otro lado, Arellano-Valle, Gómez y Quintana [2], presentan una extensión de la distribución Skew Normal, ésta extensión es llamada Skew Normal Generalizada.

Recientemente, Astorga y Gómez [3], introducen el modelo Log Skew Normal Generalizado (Log SNG), modelo que contiene a las distribuciones Log Normal y Log Skew Normal. El modelo Log SNG, constituye una familia de distribuciones paralela a la distribución Gamma Generalizada.

5. Conclusiones

La presencia de eventos como fallas, perturbaciones o deterioros en los sistemas eléctricos, no siempre pueden modelarse por la distribución Gamma Generalizada, dada esta condición, dicho modelo se ajusta forzosamente a los datos reales.

Al calcular los índices de confiabilidad, usando distribuciones que contienen parámetros de asimetría, se logra mayor flexibilidad.

Los modelos de tiempo de vida que contienen parámetros de asimetría pueden aplicarse en el cálculo del tiempo de reparación de fallas.

Actualmente, se esta trabajando en el estudio de las propiedades, de las aplicaciones y de la influencia que podría causar la distribución Log SNG, sobre los índices de confiabilidad en los sistemas eléctricos.

6. Referencias

Anders, G.J., *Probability Concepts in Electric Systems*, John Wiley & Sons, New York, 1990.

Arellano-Valle, R., Gómez, H.W., Quintana, F.A., "A new class of skew normal distributions", *Communications in Statist: Series A*, **33**(7), pp. 1465-1480, 2004.

Astorga, J.M., Gómez, H.W., "Una extensión del modelo log skew normal", *Revista de la Facultad de Ingeniería Universidad de Atacama*, **Nº17**, pp. 31-34, 2004.

Azzalini, A., "A class of distributions which includes the normal ones", *Scand J Statist*, 12, pp. 171-178, 1985.

Azzalini, A., Dal Cappello, T., Kotz, S., "Log-skew-normal and log-skew-t distributions as models for family income data", *Journal of Income Distribution*, **vol.** 11, pp. 13-21, 2003.

Louzada-Neto, F., Mazucheli, J., Achcar, J.A., *Uma Introdução à Análise de Sobrevivência e Confiabilidade*, XXVIII Jornadas Nacionales de Estadística, Antofagasta Chile, 2001.