REVISTA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA
www.ingenieria.uda.cl
18 (2004) 11-16

Las Aproximaciones de Euler Bajo la Transformada z

Alexander Börger[1], Jaime Glaría[2]

1. Departamento de Industria y Negocios, Universidad de Atacama, Chile.

2. Departamento de Electrónica, Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.

E-mail: aborger@industria.uda.cl, jgb@elo.utfsm.cl

Resumen

Se sugiere que las ecuaciones recurrentes resultantes de aplicar aproximaciones de Euler a las ecuaciones diferenciales, se sometan a la transformación z, cuando se pueda, para vislumbrar modos naturales y avisorar dificultades o restricciones en los pasos de las aproximaciones. La exposición se centra en el caso particular de la ecuación de Laplace para la conducción del calor en un paralelepípedo recto.

Palabras Clave: Aproximaciones de Euler, Ecuación de Calor.

Abstract

It is suggested that the iterative equations resultants of applying Euler approaches to differential equations undergo the z transformation if possible, in order to notice natural modes and to foresee difficulties or restrictions in the steps of the approaches. The discussion is centred in the peculiar case of the Laplace equation for heat conduction in a right parallelepiped.

Keywords: Euler Approaches, Heat Conduction Equation.

1. Introducción

Considérese la representación de Laplace para la conducción del calor en un paralelepípedo recto:

$$\frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial z^2}$$
$$= r\cdot c\cdot d\cdot\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} \qquad (1)$$

En (1) T(x,y,z,t) x, y, z y t representan a la temperatura en [K], a la distancia en [m] a lo largo del paralelepípedo, a la distancia en [m] a lo ancho, a la distancia en [m] a lo alto y al tiempo en [s] (los cinco variables), mientras r, c y d representan a la resistividad térmica en [K.m.W-1] y al calor específico en $\left[\mathrm{J}\cdot \mathrm{Kg}^{-1}\cdot K^{-1}\right]$ y a la densidad en [Kg. m-3] (los tres constantes y positivos).

Sobre todo para representaciones computacionales, (1) puede aproximarse mediante ecuaciones recurrentes. De éstas, las más simples son las que se obtienen con aproximaciones de Euler para las derivadas (entendiéndose, aunque en esto haya discrepancias con algunos autores, que dichas aproximaciones abarcan las variantes mencionadas a continuación y todas las que aproximan una derivada de orden n en base a n +1 valores del argumento).

En el caso de las derivadas respecto a x, y,y z, que en (1) se refieren a aspectos espaciales y son de segundo orden, es aconsejable usar las aproximaciones de Euler centradas:

$$\frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial x^2}$$
$$\approx \frac{T(x+\Delta x,y,z,t)-2\cdot T(x,y,z,t)+T(x-\Delta x,y,z,t)}{(\Delta x)^2}$$
$$\frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial y^2}$$
$$\approx \frac{T(x,y+\Delta y,z,t)-2\cdot T(x,y,z,t)+T(x,y-\Delta y,z,t)}{(\Delta y)^2}$$
$$\frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial z^2}$$
$$\approx \frac{T(x,y,z+\Delta z,t)-2\cdot T(x,y,z,t)+T(x,y,z-\Delta z,t)}{(\Delta z)^2}$$

La ventaja principal de estas variantes es que pondera la información por parejo en ambos sentidos de cada dirección, alrededor de (x,y,z) concordando con el carácter parejo del espacio.

En el caso de la derivada respecto a t que en (1) se refiere a aspectos temporales y es de primer orden, no está claro que haya un carácter parejo que respetar. La alternativas más obvias para las aproximaciones de Euler son:

$$\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t}\approx\begin{cases}\dfrac{T(x,y,z,t+\Delta t)-T(x,y,z,t)}{\Delta t}\\ \dfrac{T(x,y,z,t)-T(x,y,z,t-\Delta t)}{\Delta t}\\ \dfrac{T(x,y,z,t+\Delta t)-T(x,y,z,t-\Delta t)}{2\cdot\Delta t}\end{cases}$$

Las secciones que siguen estudian lo que ocurre cuando se usa cada una de esas alternativas.

2. La Primera Aproximación

Cuando se usa la primera alternativa propuesta como aproximación de Euler para la derivada respecto a *t,* junto con las propuestas antes para las derivadas respecto *x, y* y *z* (1) queda como sigue:

$$T(x,y,z,t+\Delta t)$$
$$=\left(1-\frac{2\cdot\Delta t}{r\cdot c\cdot d}\cdot\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}\frac{1}{(\Delta z)^2}\right)\right)\cdot T(x,y,z,t)$$
$$+\frac{\Delta t}{r\cdot c\cdot d(\Delta x)^2}\cdot\left(T(x-\Delta x,y,z,t)+T(x+\Delta x,y,z,t)\right) \qquad (2)$$
$$+\frac{\Delta t}{r\cdot c\cdot d(\Delta y)^2}\cdot\left(T(x,y-\Delta y,z,t)+T(x,y+\Delta y,z,t)\right)$$
$$+\frac{\Delta t}{r\cdot c\cdot d(\Delta z)^2}\cdot\left(T(x,y,z-\Delta z,t)+T(x,y,z+\Delta z,t)\right)$$

((2) debió incluir el signo ≈ en vez de = ; pero = y no ≈ es lo que ocupan las representaciones computacionales; estríctamente, *T(x,y,z,t)* no es lo mismo en (1) y en (2)).

Para vislumbrar modos naturales a través del tiempo en *(x,y,z)* basta considerar los términos en que *x,y* y *z* permanecen

constantes, y aplicar la transformación *z* refiriéndose a *t* como la variable independiente primitiva.
El resultado es:

$$\left(z-\left(1-\frac{2\cdot\Delta t}{r\cdot c\cdot d}\cdot\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}+\frac{1}{(\Delta z)^2}\right)\right)\right)\cdot T(z)=\ldots \quad (3)$$

En (3), T(z) es la transformada z de *T(x,y,z,t)* con *t* variable. (Atención: no confundir z, la variable independiente compleja de la transformada z, con z, la distancia en [m] a lo alto del paralelepípedo) Según (3), T (z) tiene un polo:

$$p_1=1-\frac{2\cdot\Delta t}{r\cdot c\cdot d}\cdot\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}+\frac{1}{(\Delta z)^2}\right) \quad (4)$$

Claramente: Im $(p_t)=0$ (5)

Esto descarta la mayoría de los vaivenes naturales de *T* en *(x,y,z);* pero deja la posibilidad a aquellos cuyo período es $2\cdot\Delta t$ (si Re$(p_t)<0$), y esa posibilidad no parece acertada porque el período obedecería al paso Δt de la aproximación, que es ajena al paralelepípedo. Por otro lado, también deja la posibilidad a inestabilidades (si Re$(p_t)<-1$ o $1<$ Re(p_t)), y el paralelepípedo no las presenta. Por lo tanto, hay que poner una condición:

$$0\angle\,\mathrm{Re}(p_1)\angle\,1$$
$$0<\Delta t\cdot\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}+\frac{1}{(\Delta z)^2}\right)<\frac{r\cdot c\cdot d}{2} \quad (6)$$

(6) restringe los pasos $\Delta x,\Delta y,\Delta z,\Delta t$. Pero hay más.

Para vislumbrar modos naturales a lo largo del paralelepípedo en *(y,z,t),* hay que considerar los términos en que *y, z* y *t* permanecen constantes, y volver a aplicar transformación z aunque esta vez refiriéndose a *x* como la variable independiente primitiva. El resultado es:

$$\left(z^2+\frac{r\cdot c\cdot d(\Delta x)^2}{\Delta t}\cdot p_t\cdot z+1\right)\cdot z^{-1}\cdot T(z)=\ldots \quad (7)$$

En (7), T(z) es la transformación Z de *T(x,y,z,t)* con *x* variable, Según (7), T(z) tiene dos polos:

$$Px_1=-\frac{r\cdot c\cdot d\cdot(\Delta x)^2}{2\cdot\Delta t}\cdot p_t+\sqrt{\left(\frac{r\cdot c\cdot d\cdot(\Delta x)^2}{2\cdot\Delta t}\cdot p_t\right)^2-1}$$
$$Px_2=-\frac{r\cdot c\cdot d\cdot(\Delta x)^2}{2\cdot\Delta t}\cdot p_t-\sqrt{\left(\frac{r\cdot c\cdot d\cdot(\Delta x)^2}{2\cdot\Delta t}\cdot p\right)^2-1} \quad (8)$$

Podría imponerse Im(p_{x1}) = Im(p_{x2}) = 0 estableciendo $r\cdot c\cdot d\cdot(\Delta x)^2\cdot p_t\leq-2\cdot\Delta t$ o $2\cdot\Delta t\leq r\cdot c\cdot d\cdot(\Delta x)^2\cdot p_t$; pero la primera opción contradiría a (6) exigiendo $p_t<0$, mientras las segunda provocaría p_{x1} = Re$(p_{x1})<0$ y p_{x2}= Re$(p_{x2})<-1$ abriendo la posibilidad a ondulaciones naturales de *T* con período $2\cdot\Delta x$ a lo largo del paralelepípedo, posibilidad que otra vez parece desacertada porque el período obedecería al paso Δx de la aproximación. Por eso conviene aceptar Im$(p_{x1})\neq0$ e Im$(p_{x2})\neq0$ admitiendo que haya ondulaciones naturales de *T* con otros períodos a lo largo del paralelepípedo; esto exige:

$$-2\cdot\Delta t\angle r\cdot c\cdot d\cdot(\Delta x)^2\cdot p_t\angle 2\cdot\Delta t$$
$$\leftrightarrow\ \Delta t\cdot\left(\frac{1}{(\Delta y)^2}+\frac{1}{(\Delta z)^2}\right)\angle\frac{r\cdot c\cdot d}{2} \quad (9)$$

E implica

$$|p_{x1}|=|p_{x2}|=1 \quad (10)$$

Lo cual ubica a los polos en la circunferencia de radio 1 y centro 0, y admite ondulaciones naturales de *T* sin atenuación ni crecimiento a lo largo del paralelepípedo.

Con un método como el recién empleado también puede vislumbrarse modos naturales a lo ancho y alto del paralelepípedo, y admitirse otras ondulaciones de *T* en esas direcciones si se cumple exigencias similares a la (9):

$$-2\cdot\Delta t\angle r\cdot c\cdot d\cdot(\Delta y)^2\cdot p_t\angle 2\cdot\Delta t$$
$$\leftrightarrow\ \Delta t\cdot\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta z)^2}\right)\angle\frac{r\cdot c\cdot d}{2} \quad (11)$$

$-2\cdot\Delta t < r\cdot c\cdot d\cdot(\Delta z)^2\, p_t < 2\cdot\Delta t$

$$\leftrightarrow\ \Delta t\cdot\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}\right) < \frac{r\cdot c\cdot d}{2} \qquad (12)$$

Cabe destacar que la restricción impuesta por (6) a los pasos Δx, Δy, Δz y Δt es más drástica que las impuestas por (9), (11) y (12), y que, por consecuencia, cumpliendo (6) se admite la existencia de ondulaciones naturales de temperatura, sin atenuación ni crecimiento, a lo largo, a lo ancho y a lo alto del paralelepípedo.

Cabe destacar, también, que esas ondulaciones serían solo transitorias pues, a medida que se alcanza estados estacionarios, *T(x,y,,z,t) y T(x,y,z,t+Δt)* se igualan y (2) se convierte en:

$$\begin{aligned} 0 = &-2\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta z)^2}\right).T(x\cdot y\cdot z) \\ &+\frac{1}{(\Delta x)^2}.\left(T(x-\Delta x,y,z)+T(x+\Delta x,y,z)\right) \\ &+\frac{1}{(\Delta y)^2}.\left(T(x,y-\Delta y,z)+T(x,y+\Delta y,z)\right) \\ &+\frac{1}{(\Delta z)^2}.\left(T(x,y,z-\Delta z)+T(x,y,z+\Delta z)\right) \end{aligned} \qquad (13)$$

En esas condiciones, al considerar los términos en que *y* y *z* permanecen constantes y aplicar la transformación *z* refiriéndose a *x* como la variable independiente primitiva, se consigue:

$$\left(z^2-2\left(1+\frac{(\Delta x)^2}{\Delta y^2}+\frac{(\Delta x)^2}{\Delta z^2}\right)\cdot z+1\right)\cdot z^{-1}\cdot T(z) = \ldots \qquad (14)$$

Con dos polos

$$\begin{aligned} p_{x1} &= 1+\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta y)^2}+\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta z)^2}+\sqrt{\left(1+\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta y)^2}+\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta z)^2}\right)^2-1} \\ p_{x2} &= 1+\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta y)^2}+\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta z)^2}-\sqrt{\left(1+\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta y)^2}+\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta z)^2}\right)^2-1} \end{aligned} \qquad (15)$$

Donde $Im(p_{x1})=Im(p_{x2})=0$, $1<Re(p_{x1})$ y $0<Re(p_{x2})$, lo cual no admite ondulaciones naturales de T a lo largo del paralelepípedo.

Con los modos naturales a lo ancho y alto del paralelepípedo, ocurre lo mismo.

Queda por aclarar cómo se da el cambio de la situación anterior transitoria a esta estacionaria.

3. La Segunda Aproximación

Cuando se usa la segunda alternativa propuesta con aproximación de Euler para la derivada respecto a t, (1) queda como sigue:

$$\begin{aligned} &\left(1+\frac{2\cdot\Delta t}{r\cdot c\cdot d}\cdot\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}+\frac{1}{(\Delta z)^2}\right)\right)\cdot T(x,y,z,t) \\ &= T(x,y,z,t-\Delta t) \\ &+\frac{\Delta t}{r\cdot c\cdot d\cdot(\Delta x)^2}\cdot\left(T(x+\Delta x,y,z,t)+T(x-\Delta x,y,z,t)\right) \\ &+\frac{\Delta t}{r\cdot c\cdot d\cdot(\Delta y)^2}\cdot\left(T(x,y+\Delta y,z,t)+T(x,y-\Delta y,z,t)\right) \\ &+\frac{\Delta t}{r\cdot c\cdot d\cdot(\Delta z)^2}\cdot\left(T(x,y,z+\Delta z,t)+T(x,y,z-\Delta z,t)\right) \end{aligned} \qquad (16)$$

Al considerar los términos en que x, y y z permanecen constantes y aplicar la transformación z refiriéndose a t como la variable independiente primitiva, se consigue:

$$\left(\left(1+\frac{2\cdot\Delta t}{r\cdot c\cdot d}\cdot\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}+\frac{1}{(\Delta z)^2}\right)\right)\cdot z-1\right)\cdot z^{-1}\cdot T(z) = \qquad (17)$$

Con un polo:

$$p_t = \frac{1}{1+\frac{2\cdot\Delta t}{r\cdot c\cdot d}\cdot\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}+\frac{1}{(\Delta z)^2}\right)} \qquad (18)$$

Donde Im(pt)=0, como en (5), y 0<Re(pt)<1, como en (6) pero sin necesidad de restringir los pasos. (Es notable, sin embargo, que el polo descrito en (18) puede anotarse como1/(1+λ), que el polo descrito en (4) puede anotarse como 1-λ y que, con la restricción hecha en (6). |λ|<1 y 1/(1+λ)= 1-λ+λ2-λ3+…≈1-λ).

Por otro lado, al considerar los términos en que y, z y t permanecen constantes y aplicar la transformación z refiriéndose a x como la variable independiente primitiva, se consigue algo parecido a (7) pero con un cambio de signo y con pt según (18) en vez de (4):

$$\left(z^2 - \frac{r\cdot c\cdot d\cdot(\Delta x)^2}{\Delta t}\cdot p_t\cdot z + 1 \right)\cdot z^{-1}\cdot T(z) = \ldots \qquad (19)$$

Por supuesto, hay dos polos (con pt según (18)):

$$p_{x1} = \frac{r\cdot c\cdot d\cdot(\Delta x)^2}{2\cdot\Delta t}\cdot p_t + \sqrt{\left(\frac{r\cdot c\cdot d\cdot(\Delta x)^2}{2\cdot\Delta t}\cdot p_t\right)^2 - 1}$$

$$p_{x2} = \frac{r\cdot c\cdot d\cdot(\Delta x)^2}{2\cdot\Delta t}\cdot p_t - \sqrt{\left(\frac{r\cdot c\cdot d\cdot(\Delta x)^2}{2\cdot\Delta t}\cdot p_t\right)^2 - 1} \qquad (20)$$

Donde Im(px1)≠0, Im(px2) ≠0 (pues |r·c·d·(Δ x)2·pt/(2·Δt)| <1) y |px1|=|px2|=1, como en (10) pero sin necesidad de restringir los pasos con (9). Esto admite ondulaciones naturales de T sin atenuación ni crecimiento a lo largo del paralelepípedo.

Con un método como el recién empleado puede vislumbrarse modos naturales a lo ancho y alto del paralelepípedo, y admitirse otras ondulaciones de T en esas direcciones sin cumplir exigencias.

Las ondulaciones de T a lo largo, ancho y alto del paralelepípedo serían transitorias pues, a medida que se alcanza estados estacionarios, T(x,y,z,t-Δt) y T(x,y,z,t) se igualan y (16) se convierte en (13), como ocurrió con (2) en la sección anterior.

4. La Tercera Aproximación

Cuando se usa la tercera alternativa propuesta como aproximación de Euler para la derivada respecto a t, (1) queda como sigue:

$$\begin{aligned}
&T(x,y,z,t+\Delta t)\\
&= -\frac{4\cdot\Delta t}{r\cdot c\cdot d}\cdot\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}+\frac{1}{(\Delta z)^2}\right)\cdot T(x,y,z,t)\\
&+ T(x,y,z,t-\Delta t)\\
&+ \frac{2\cdot\Delta t}{r\cdot c\cdot d\cdot(\Delta x)^2}\cdot\left(T(x+\Delta x,y,z,t)+T(x-\Delta x,y,z,t)\right)\\
&+ \frac{2\cdot\Delta t}{r\cdot c\cdot d\cdot(\Delta y)^2}\cdot\left(T(x,y+\Delta y,z,t)+T(x,y-\Delta y,z,t)\right)\\
&+ \frac{2\cdot\Delta t}{r\cdot c\cdot d\cdot(\Delta z)^2}\cdot\left(T(x,y,z+\Delta z,t)+T(x,y,z-\Delta z,t)\right)
\end{aligned} \qquad (21)$$

Al considerar los términos en que x, y y z permanecen constantes y aplicar la transformación z refiriéndose a t como la variable independiente primitiva, se consigue:

$$\left(z^2 + \frac{4\cdot\Delta t}{r\cdot c\cdot d}\cdot\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}+\frac{1}{(\Delta z)^2}\right)\cdot z - 1 \right)\cdot z^{-1}\cdot T(z) = \ldots \qquad (22)$$

Con dos polos

$$p_{r1} = -\frac{2\cdot\Delta t}{r\cdot c\cdot d}\cdot\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}+\frac{1}{(\Delta z)^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{2\cdot\Delta t}{r\cdot c\cdot d}\cdot\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}+\frac{1}{(\Delta z)^2}\right)\right)^2 + 1}$$

$$p_{r2} = -\frac{2\cdot\Delta t}{r\cdot c\cdot d}\cdot\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}+\frac{1}{(\Delta z)^2}\right) - \sqrt{\left(\frac{2\cdot\Delta t}{r\cdot c\cdot d}\cdot\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}+\frac{1}{(\Delta z)^2}\right)\right)^2 + 1}$$

Donde Im(pt1)=Im(pt2)=0 (porque el argumento de las raíces es mayor que 1), 0<Re(pt1) y Re(pt2)< -1. Por esta última característica, T queda con un vaivén natural de amplitud creciente a través del tiempo. (18) es inestable y la aproximación simplemente no sirve.

5. Conclusiones

De la ecuación de Laplace para la conducción del calor en un paralelepípedo recto, puede obtenerse distintas ecuaciones recurrentes usando diferentes variantes de las aproximaciones de Euler para las derivadas. Aquí se ha expuesto tres de esas ecuaciones, se les ha hecho algunos exámenes de modos naturales poniéndolas bajo la transformación z y de ello se ha deducido restricciones para los pasos de las aproximaciones u otras vicisitudes. Específicamente, se ha deducido que:

- la primera ecuación recurrente, la (2), necesita cumplir ciertas restricciones para funcionar bien,
- la segunda ecuación recurrente, la (16), funciona sin restricciones y, por consecuencia, resulta más atrayente (aunque, como se podría ver en otra ocasión tiene complicaciones propias),
- y la tercera ecuación recurrente, la (21), simplemente no funciona bien.

Por eso se sugiere que, en general, las ecuaciones recurrentes resultantes de aplicar aproximaciones de Euler a las ecuaciones diferenciales, se sometan a la transformación z, cuando se pueda, para vislumbrar modos naturales y avisorar dificultades o restricciones en los pasos de las aproximaciones, Börger A (1996) y Börger A., Glaría, J. (2000).

6. Referencias

Börger A. (1996) Estimación de temperaturas y niveles de fases en el convertidor tipo Teniente, mediante mediciones sobre el manto del convertidor usando técnicas no invasivas. Memoria de titulación, Universidad Técnica Federico Santa María, 1996.

Börger A., Glaría, J. (2000) Estimación de temperaturas y niveles de fases en el convertidor tipo Teniente, mediante mediciones sobre el manto del convertidor usando técnicas no invasivas. XI CONAMET 2000. Universidad de La Serena, Agosto de 2000. Páginas 349-354.