REVISTA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA
www.ingenieria.uda.cl
18 (2004) 17-20

Una Nueva Familia de Distribución Basada en el Modelo Gamma

Milton A. Cortés[1] **Héctor W. Gómez**[1]

1. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ingeniería, Universidad de Atacama, Chile.

E-mail: mcortes@matematica.uda.cl, hgomez@matematica.uda.cl

Resumen

En este artículo se da ha conocer una nueva familia de distribución basada en el modelo Gamma, en la cuál se incluye un nuevo parámetro que hace más flexible la distribución. Este nuevo modelo genera distribuciones unimodales y bimodales dependiendo del valor del nuevo parámetro. Se estudian las propiedades básicas de esta nueva familia de distribuciones, así como su representación estocástica y momentos.

Palabras Claves: Distribución Gamma, Momentos, Representación Estocástica.

Abstract

In this article, we release a new family distribution based on the Gamma model, in which includes a new parameter that makes distribution more flexible. This new model generates unimodal and bimodal distributions depending on the value of the new parameter. The basic properties of this new distributions family was studied, as well as its stochastic representation and moments.

Keywords: Gamma Distribution, Moments, Stochastic Representation.

1

1. Introducción.

Existe una familia que contiene a las distribuciones Chi-cuadrado y Exponencial, esta distribución se llama Gamma y su función de densidad es

$$f(x \mid \alpha,\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \quad , \; x > 0 \qquad [1]$$

Donde $\alpha > 0$, $\beta > 0$, y la denotaremos $X : G(\alpha,\beta)$

Algunas propiedades de esta densidad son:

$$E[X] = \alpha\beta \qquad Var(X) = \alpha\beta^{2} \qquad [2]$$

En este artículo formulamos un nuevo modelo basada en el modelo Gamma, que hace más flexible la asimetría de esta densidad. Una consecuencia importante que obtenemos con este nuevo modelo es que se construye un modelo bimodal, es decir, se tiene una extensión del modelo generado por una mezcla de normales.

El artículo se desarrolla de la siguiente manera, en la sección 2 entregamos la definición de la distribución de la nueva familia basada en el modelo Gamma, las propiedades básicas. La representación estocástica y los momentos

2. Extensión de la nueva distribución basada en el modelo Gamma

En esta sección introducimos una nueva extensión del modelo Gamma, distinta a la entregada por Amoroso (1925) y estudiamos sus propiedades.

Definición 1.

La función de densidad de probabilidad es:

$$f(x \mid \boldsymbol{\theta}) = \frac{(1+\gamma)\, e^{-\frac{x}{\beta(1-\gamma)^2}} + (1-\gamma)\, e^{-\frac{x}{\beta(1+\gamma)^2}}}{2(1-\gamma^2)\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} \quad , \; x > 0 \qquad [3]$$

Donde $\boldsymbol{\theta} = (\alpha,\beta,\gamma)$ y $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 \le \gamma < 1$.

Si X tiene una densidad como en [3] decimos que X es una variable aleatoria basada en el modelo Gamma y la denotaremos por $X \sim G(\alpha,\beta,\gamma)$.

En las Figuras 1, 2 y 3 se muestra la forma que toma [3] en el caso unimodal y las Figuras 4, 5, 6 y 7 en el caso bimodal para diferentes valores de α , β y γ .

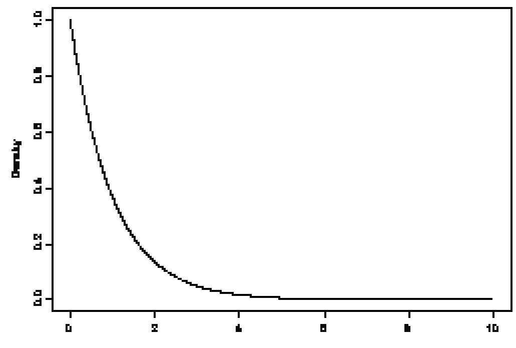

Figura 1: Función de densidad unimodal $\alpha = 1, \beta = 1$ y $\gamma = 0$

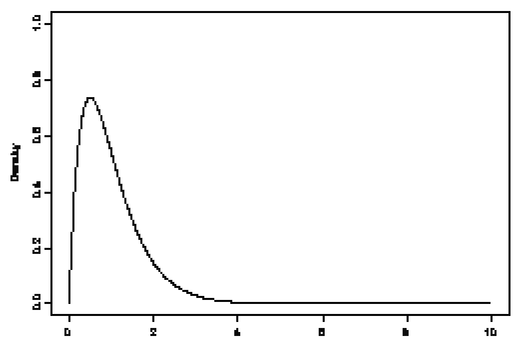

Figura 2: Función de densidad unimodal $\alpha = 2, \beta = 0.5$ y $\gamma = 0$

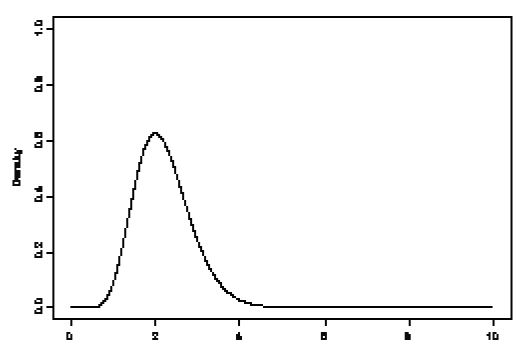

Figura 3: Función de densidad unimodal $\alpha = 11, \beta = 0.5$ y $\gamma = 0$

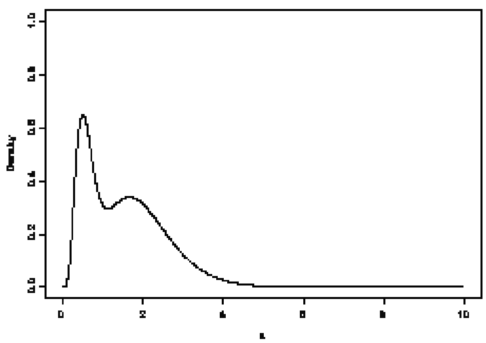

Figura 4: Función de densidad bimodal $\alpha = 6$, $\beta = 0.2$ y $\gamma = 0.3$

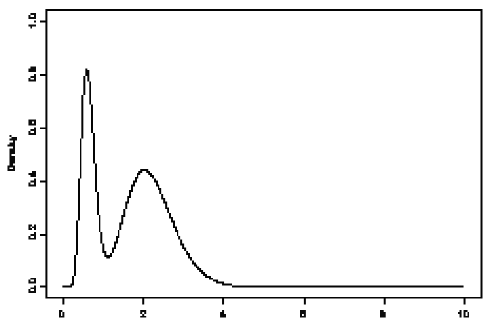

Figura 5: Función de densidad bimodal $\alpha = 13$, $\beta = 0.1$ y $\gamma = 0.3$

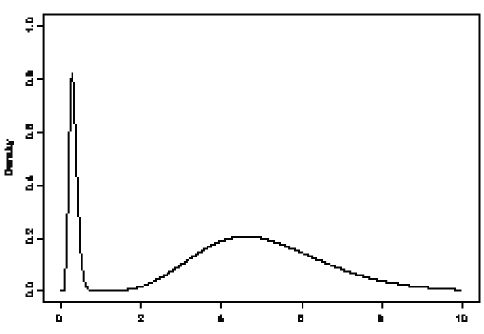

Figura 6: Función de densidad bimodal $\alpha = 10$, $\beta = 0.2$ y $\gamma = 0.6$

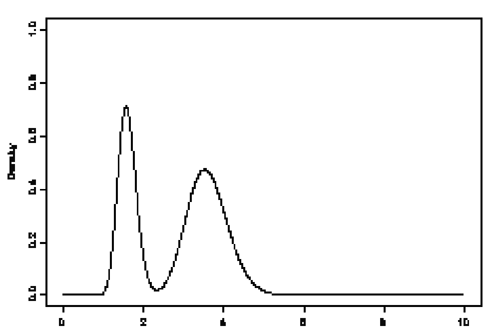

Figura 7: Función de densidad bimodal $\alpha = 50$, $\beta = 0.05$ y $\gamma = 0.2$

2.1 Propiedades Básicas.

Las siguientes propiedades se obtienen en forma inmediata de la definición [3].

Proposición 1.

1.- $f\left(x \middle| \alpha, \beta, \gamma = 0\right) = G(\alpha, \beta)$

2.- $f\left(x \middle| \alpha = \frac{n}{2}, \beta = 2, \gamma = 0\right) = \chi^2_{(n)}$

3.- $f\left(x \middle| \alpha = 1, \beta, \gamma = 0\right) = Exp(\beta)$

Comentarios.

El resultado de la proposición 1 observamos que: 1 corresponde a la distribución Gamma de parámetros α y β, 2 corresponde a la distribución Chi-cuadrado con n grados de libertad, 3 corresponde a la distribución Exponencial de parámetro β .

3. Representación Estocástica

La proposición siguiente muestra la representación estocástica del modelo. Es decir si X tiene densidad como en [3], luego X puede representarse como el producto de dos variables aleatorias independientes.

Proposición 2.

Para $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 \leq \gamma < 1$, se tiene que $X \sim G(\alpha, \beta, \gamma)$ si y solo si existen dos variables aleatorias independientes U_γ y V con $V \sim G\left(\alpha, \beta\right)$ y $P\left(U_\gamma = 1 - \gamma\right) = 1 - P\left(U_\gamma = -(1+\gamma)\right) = \frac{1-\gamma}{2}$ tal que $X = U_\gamma^2 \cdot V$

Demostración. Se obtiene directamente de la definición.

3.1 Momentos

En lo que sigue daremos algunos resultados importantes para obtener los momentos de la nueva familia basada en la distribución Gamma

Proposición 3.

Sea $X \sim G(\alpha, \beta, \gamma)$. Entonces

$$\mu_r = E[X] = \left[\frac{\left[(1-\gamma)^{2r+1}\right] + (1+\gamma)^{2r+1}}{2} \right] \frac{\Gamma(r+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \beta^r$$

$\forall\, r = 1, 2, \ldots\ldots$

Demostración. El resultado se obtiene usando la independencia de U_γ y V en la proposición 2.

Proposición 4. Sea $X \sim G(\alpha, \beta, \gamma)$. Entonces la función generatriz de momentos de X está dada por:

$$M_X(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{(1-\gamma)}{\left(1-\beta(1-\gamma)^2\right)^{\alpha}} + \frac{(1+\gamma)}{\left(1-\beta(1+\gamma)^2\right)^{\alpha}} \right]$$

Comentario.

Una consecuencia inmediata de la proposición 3, son la esperanza y la varianza de la distribución $G(\alpha, \beta, \gamma)$ dada por:

$$E[X] = \left(1 + 3\gamma^2\right)\alpha\beta \qquad [4]$$

$$Var(X) = \alpha\beta^2 + 10\alpha\beta^2 + 5\alpha\beta^2\gamma^4 + 4\alpha^2\beta^2\gamma^2 - 4\alpha^2\beta^2\gamma^4 \qquad [5]$$

4. Conclusiones

Podemos decir que se ha obtenido un modelo más flexible que el modelo Gamma. Este nuevo modelo genera distribuciones unimodales y bimodales que es una extensión del modelo generado por una mezcla de normales.

5. Referencias

Amoroso, L. (1925). Ricerche intorno alla curva dei redditi, *Annali di Mathemática.* Series IV, **2**, 123-159.

Casella, George (1990) Statistical Inference. Duxbury Press.