REVISTA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA
www.ingenieria.uda.cl
18 (2004) 21-24

La Distribución SN (α,β)

David Elal[1], Salim Elal[1], Héctor W. Gómez[1]

1. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ingeniería, Universidad de Atacama, Chile.
delal@matematica.uda.cl, selal@matematica.uda.cl, hgomez@matematica.uda.cl

Resumen

En este artículo se introduce un nuevo modelo normal asimétrico que depende de dos parámetros α y β, de tal forma que cuando $\beta = 0$ se tiene el modelo skew-normal de Azzalini (1985) y cuando $\beta = \alpha$ se tiene el modelo skew-normal univariado introducido por Sahu y otros (2003). Se estudian las propiedades básicas, momentos, función generadora de momentos y coeficientes de asimetría y kurtosis.

Palabras claves: Distribución skew-normal, representación estocástica del modelo skew-normal, coeficientes de asimetría y kurtosis.

Abstract

A new normal skew model is discussed in this paper. This depend on two parameters α y β, and for $\beta = 0$, the normal-skew model of Azzalini (1985) is obtained and for $\beta = \alpha$ the univariate skew-normal model reported for Sahu et. al (2003) is obtained. Additionaly, basic properties, moments, moment generating functions, skewness coefficients and kurtosis where also studied.

Keywords: Skew-normal distributions, stochastic representation of skew-normal model, skewness coefficients and kurtosis

1

1. Introducción.

Una de las primeras distribuciones asimétricas llamadas skew, fue introducida por O`Hagan y Leonard(1976) como una priori en un análisis bayesiano, después Azzalini (1985) estudia las propiedades e inferencias de esta distribución en el caso univariado y la llama skew-normal. Henze (1986) entrega la representación estocástica de esta distribución, utilizando dicha representación calcula los momentos impares de la densidad skew-normal y encuentra la función generatriz de momentos.
En un paper reciente Sahu y otros (2003) introduce un modelo skew que obedece a la función de densidad:

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{1+\alpha^2}}\phi\left(\frac{x}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)\Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)\quad \alpha\in\mathbb{R} \qquad [1]$$

El propósito de este artículo es mostrar un nuevo modelo que comprende tanto al modelo de Azzalini como al modelo presentado por Sahu.

Algunos resultados a considerar:

Si $U\sim N(0,1)$ y $V\sim N(0,1)$
Entonces

$$E\left[|U|^n\right]=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \qquad [2]$$

$$E\left[V^{2n}\right]=\prod_{j=1}^{n}(2j-1)\quad \text{y}\quad E\left[V^{2n-1}\right]=0\quad \forall\, n\in\mathbb{N} \qquad [3]$$

Por otra parte, haremos uso de la integral 6.74 de Hadzi (1971)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-b^2x^2+cx\}\Phi(ax)\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{\text{b}}\exp\left(\frac{c^2}{4b^2}\right)\Phi(K) \qquad [4]$$

$$\text{donde } K=\frac{ac}{2b\sqrt{\frac{a^2}{2}+b^2}}$$

Definición 1.

La función de densidad de probabilidad de la distribución Skew-Normal de parámetros α y β es:

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{1+\beta^2}}\phi\left(\frac{x}{\sqrt{1+\beta^2}}\right)\Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1+\beta^2}}\right) \qquad [5]$$

Donde ϕ y Φ corresponden a las funciones de densidad y distribución respectivamente de un modelo $N(0,1)$, con $\alpha\in\mathbb{R}$ y $\beta\in\mathbb{R}$

Si X tiene una densidad como en [5] decimos que X se distribuye según una variable aleatoria Skew-Normal de parámetros α y β

Y la denotaremos por $X\sim SN(\alpha,\beta)$.

Proposición 1. Si $Z\sim SN(\lambda)$
Entonces $H=\sqrt{1+\beta^2}Z\sim SN(\lambda,\beta)$

Demostración

$$F_H(h)=P[H\le h]=P\left[\sqrt{1+\beta^2}Z\le h\right]$$
$$=P\left[Z\le\frac{h}{\sqrt{1+\beta^2}}\right]$$
$$=F_Z\left(\frac{h}{\sqrt{1+\beta^2}}\right)$$
$$f_H(h)=\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}f_Z\left(\frac{h}{\sqrt{1+\beta^2}}\right)$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1+\beta^2}}\phi\left(\frac{h}{\sqrt{1+\beta^2}}\right)\Phi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\beta^2}}h\right)$$

Proposición 2 Sea $Z\sim SN(\lambda)$

Si $H=\sqrt{1+\beta^2}Z$ entonces

$$E\left[H^n\right]=M_n\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}\left(\frac{1}{\lambda\sqrt{2}}\right)^h\Gamma\left(\frac{n-h+1}{2}\right)E\left[V^h\right]$$

$$con\ \mathrm{M_n}=\frac{\lambda^n}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2(1+\beta^2)}{1+\lambda^2}\right)^{n/2}\quad \text{y}\quad \mathrm{V}\sim\mathrm{N}(0,1)$$

Demostración

Sea $U\sim N(0,1)$ y $V\sim N(0,1)$
Si $Z=\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}|U|+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}V$
Según Henze $Z\sim SN(\lambda)$.
Ahora si consideramos la transformación
$H=\sqrt{1+\beta^2}Z$
Tenemos que:

$$E\left[H^n\right]=E\left[\left(\frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}}|U|+\frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}}V\right)^n\right]$$

Si $a=\frac{\lambda\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ y $b=\frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}}$, entonces

$$E\left[H^n\right]=E\left[\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}\left(a|U|\right)^{n-h}\left(bV\right)^h\right]$$

$$=E\left[\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}a^{n-h}E\left[|U|^{n-h}\right]b^hE\left(V^h\right)\right]$$

Aplicando [2] y [3] se tiene que:

$$E\left[H^n\right]=M_n\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}\left(\frac{1}{\lambda\sqrt{2}}\right)^h\Gamma\left(\frac{n-h+1}{2}\right)E\left[V^h\right]$$

$$con\ \mathrm{M}_n=\frac{\lambda^n}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2(1+\beta^2}{1+\lambda^2}\right)^{n/2}$$

Proposición 3. Sean $Z\sim SN(\lambda)$

y $H=\sqrt{1+\beta^2}Z$, entonces

$$E\left[\exp(Ht)\right]=2\exp\left(\frac{1+\beta^2}{2}t^2\right)\Phi\left(\frac{\lambda\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}}t\right)$$

Demostración

$$E\left[\exp(Ht)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ht)f_H(h)\,dh$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ht)\frac{2}{\sqrt{1+\beta^2}}\phi\left(\frac{x}{\sqrt{1+\beta^2}}\right)\Phi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\beta^2}}\right)dh$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}h^2+\sqrt{1+\beta^2}th\right]\Phi\left(\lambda h\right)dh$$

Haciendo en [4]

$$b^2=\frac{1}{2}\quad;\quad c=t\sqrt{1+\beta^2}\quad;\quad a=\lambda$$

Se tiene que

$$E\left[\exp(Ht)\right]=2\exp\left(\frac{\left(1+\beta^2\right)}{2}t^2\right)\Phi\left(\frac{\lambda\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}}t\right)$$

Observación

Podemos obtener, a través de las proposiciones 2 ó 3, los 4 primeros momentos de la variable aleatoria H con el propósito de encontrar tanto el coeficientes de asimetría como el de kurtosis.
Así entonces

$$\mu_1=E\left[H\right]=\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2\left(1+\beta^2\right)}{1+\lambda^2}\right)^{1/2}$$

$$\mu_2=E[H^2]=1+\beta^2$$

$$\mu_3=E\left[H^3\right]=\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2\left(1+\beta^2\right)}{1+\lambda^2}\right)^{3/2}\left(\frac{2\lambda^2+3}{2}\right)$$

$$\mu_4=E\left[H^4\right]=3\left(1+\beta^2\right)^2$$

Proposición 4

Sea $Z\sim SN(\lambda)$ El coeficiente de asimetría α_3 de la variable aleatoria $H=\sqrt{1+\beta^2}Z$ esta dada por:

$$\alpha_3=\frac{\sqrt{2}\lambda^3(4-\pi)}{\left(\pi+\lambda^2\pi-2\lambda^2\right)^{3/2}}$$

Demostración

$$\alpha_3=\frac{\mu_3-3\mu_1\mu_2+2\mu_1^3}{\left(\mu_2-\mu_1^2\right)^{3/2}}=\frac{\sqrt{2}\lambda^3(4-\pi)}{\left(\pi+\lambda^2\pi-2\lambda^2\right)^{3/2}}$$

Proposición 5

Sea $Z\sim SN(\lambda)$ El coeficiente de Kurtosis α_4 de la variable aleatoria $H=\sqrt{1+\beta^2}Z$ esta dada por:

$$\alpha_4=\frac{8\lambda^4(\pi-3)}{\left(\pi+\lambda^2\pi-2\lambda^2\right)^2}+3$$

Demostración

$$\alpha_4=\frac{\mu_4-4\mu_1\mu_2+6\mu_1^2\mu_2-3\mu_1^4}{\left(\mu_2-\mu_1^2\right)^2}$$

$$=\frac{3\pi^2+6\pi^2\lambda^2+3\pi^2\lambda^4-12\lambda^4-4\pi\lambda^4-12\pi\lambda^2}{\left(\pi+\pi\lambda^2-2\lambda^2\right)^2}$$

$$\alpha_4-3=\frac{8\lambda^4(\pi-3)}{\left(\pi+\lambda^2\pi-2\lambda^2\right)^2}$$

Comentario:

1.- Si en el modelo [5] hacemos $\beta=0$ estamos bajo el modelo de $SN(\alpha)$ de Azzalini cuya densidad es $f(x)=2\phi(x)\Phi(\alpha x)\quad \alpha\in$ ¡ . Por otra parte si hacemos $\beta=\alpha$, nos encontramos bajo el modelo presentado por Sahu y cuya densidad es:

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{1+\alpha^2}}\phi\left(\frac{x}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)\Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)\quad\alpha\in ¡\ .$$

2.- En el modelo $SN(\alpha, \beta)$, el coeficiente de asimetría como el de kurtosis son coincidentes con los del modelo de Azzalini por tratarse de una reparametrización por escala del modelo $SN(\alpha)$

Referencias

Azzalini, A. (1985) A class of distributions which includes the normal one. *Scand. J Statist*. **12,** 171-8

Henze, N. (1986) – A Probabilistic Representation of the Skew- Normal Distribution – *Scand. J. Statist.* **13**, 271-5

Sahu, Dey y Branco (2003) A new class of multivariate skew distribution with applications to Bayesian regression models. *The Canadian Journal of Statistics.*

Hadzi P. (1971) Probability Function (in Russian) Kishinev. Academy of Science of Moldavia