REVISTA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA
www.ingenieria.uda.cl
18 (2004) 36-40

Sobre las Desigualdades Variacionales para Fluidos Asimétricos Viscosos No-Homogéneo

Mariano Poblete C[1]

Resumen

Consideramos desigualdades variacionales vinculadas a movimientos de fluidos incompresibles que dependen de su densidad. Introducimos y comparamos los conceptos de solución fuerte, débil y solución muy débil. Estos tipos de problemas han sido considerados para las ecuaciones clásicas de Navier-Stokes por alugunos autores y también existen algunas contribuciones en el caso de fluidos no-homogéneos o variantes de estos. Sin Embargo, esto no ha sido estudiado en el caso de fluidos incompresibles asimétricos no-homogéneos. Este caso tiene la particularidad de que el tensor de tensiones no es simétrico.

Palabras Claves: Desigualdades Variacionales, Fluidos Incompresibles, Soluciones Débiles.

Abstract

We consider a variational inequality related to the motion of density-dependent incompressible asymmetric fluids. We introduce and compare the concepts of strong, weak and very weak solution.
These type of problems for the case of the classical Navier-Stokes equations has been studied by some authors. Also, there exist some contributions in non-homogeneous fluids or variants. However, no study has been considered for the inequalities related to the motion of non-homogeneous incompressible asymmetric fluids (these type of fluids has the particularity that the stress tensor is not symmetric).

Keywords: Incompressible Fluids, Variational Inequalities, Weak Solutions.

1. Introducción

Las desigualdades variacionales en mecánica son bastantes conocidas y aparecen cuando se imponen restricciones adicionales sobre las incógnitas del problema para describir situaciones físicas particulares, tales como flujos lentos o estacionarios.

Para el caso de la ecuación de Naiver-Stokes, (homogéneo) este tipo de problema ha sido estudiado por algunos autores como: [3], [5], [6], [8]

Además, existen algunos estudios tratando el caso no-homogéneo (densidad Variable) o algunas variantes, como: [1], [7]

Sin embargo, estudios de este tipo para movimientos de fluidos incompresibles asimétricos no – homogéneos (es decir, el tensor de esfuerzos no es simétrico) no han sido considerados en la literatura.

Junto a otros autores en [9] consideremos diferentes tipos de formulaciones variacionales (desigualdades), formulación fuerte, formulación débil, y una formulación muy débil; para este sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

En [9] se presenta un resultado de existencia de solución para la formulación débil. Aquí nos limitaremos a describir y a comentar las formulaciones variacionales citadas anteriormente, así como la metodología empleada en [9].

Definición.

Consideremos un dominio Ω acotado tridimensional Ω, $T > 0$ y $Q_T = \Omega \times (0, T)$.

Las ecuaciones que describe el movimiento de un fluido asimétrico no-homogéneo son dadas por:

$$\rho \partial_t u + \rho(u \cdot \nabla)u - (\mu + \mu_r)\Delta u + \nabla p = 2\mu_r \operatorname{rot} w + \rho f, \quad \operatorname{div}(u) = 0$$
$$\rho \partial_t w + \rho(u \cdot \nabla)w - (C_a + C_d)\Delta w - (C_0 + C_a - C_d)\nabla \operatorname{div}(w) + 4\mu_r w = 2\mu_r r_0 t u + \rho g$$
$$\partial_t \rho + (u \cdot \nabla)\rho = 0$$

Donde las funciones $u = (u_1, u_2, u_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$, Denotan el vector de velocidad y el vector velocidad de rotación de las partículas.

Además ρ denota densidad, p denota la presión y f, g denotan fuentes externas.

Las constantes positivas μ, μ_r, C_0, C_a, C_d denotan viscosidades. Se considera $C_0 + C_d > C_a$.

También, se asume que sobre la frontera $\partial\Omega$ se tiene: $u(x, t) = w(x, t) = 0$, $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]$
y además, se consideran los siguientes datos iniciales:

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ en } \Omega$$
$$w(x, 0) = w_0(x) \text{ en } \Omega$$
$$\rho(x, 0) = \rho_0(x) \text{ en } \Omega$$

En los trabajos sobre fluidos no-homogéneos [1], [7], se usa una formulación "parcialmente linealizada" del problema (llamado solución "muy débil" en este trabajo) en vez de usar el problema original (llamada solución fuerte y solución débil, conceptos que son diferenciados solamente por la regularidad de la solución): La solución del problema original es también una solución muy débil, pero lo contrario, no siempre es verdad.

Aquí estudiaremos la existencia global de soluciones débiles y en trabajos posteriores se estudiarán soluciones fuertes.

2. Formulación del problema.

Daremos tres formulaciones variacionales del problema que serán estudiadas. Para esto definiremos los siguientes espacios:

$$\Phi_1 = \{ v \in L^2(0, T; V),\ \partial_t v \in L^2(0, T; L^{6/5}(\Omega)),\ \nabla v \in L^\infty(0, T; L^{3/2}(\Omega)) \}$$

$$\Phi_2 = \{ w \in L^2(0, T, H^1_0(\Omega)),\ \partial_t w \in L^2(0, T; L^{6/5}(\Omega)),\ \nabla w \in L^\infty(0, T; L^{3/2}(\Omega)) \}$$

Sean K_1, K_2 conjuntos convexos cerrados tales que $K_1 \subseteq H$, $K_2 \subseteq L^2(\Omega)$ con $0 \in K_i$, $i = 1, 2$.-

Definamos las siguientes forma bilineales en V y H_0^1 (Ω), respectivamente.
a1=(u, v) = ($\mu + \mu r$)(∇u, ∇v)
a2= (w, ψ)= $\beta(\nabla w, \nabla\psi) + \gamma(\nabla w, \nabla\psi) + 4\mu r$ (w, ψ)

a) Formulación fuerte.

Decimos que (u, w, ρ) es una solución fuerte si
(u, w, ρ)$\in$ ($\Phi 1$, $\Phi 2$, $L\infty$(QT) con u(t) $\in$ K1,
w(t) $\in$ K2 $\forall$ t $\in$ [0, T], tal que
($\rho\, \partial$ t u + ρ(u $\cdot \nabla$)u , v – u) + a1(u, v – u) $\geq 2\mu r$ (rot w , v – u) + (ρf, v – u)
$\forall$ v $\in$ L2 (0, T; V), V(t) $\in$ K1.-
($\rho\, \partial$ t w + ρ(u $\cdot \nabla$)w, ψ - w) + a2(w, ψ - w)
$\geq 2\mu r$ (rot u, ψ – w) + (ρg, ψ - w)
$\forall\, \psi \in$ L2 (0, T; H_0^1(Ω)), ψ(t) $\in$ K2.-
$\frac{\partial \rho}{\partial t}$ + div(ρn) = 0 (1)

Satisfaciendo las condiciones iniciales:

u(x, 0) = u0 (x) en Ω
w(x, 0) = w0 (x) en Ω
ρ(x, 0) = ρ0 (x) en Ω

Observemos que (u, w) verifican las condiciones de frontera u = w = 0 sobre $\Sigma=\partial\Omega$ x (0, T) y u verifica la condición de incompresibilidad div (u) = 0 en QT =Ω x (0, T).

Por otro lado las condiciones iniciales para u y v tienen sentido, pues u $\in$ L2 (0, T; V) con

∂t u $\in$ L2(0, T; V\`), w $\in$ L2 (0, T;H_0^1 (Ω)) con ∂t w$\in$ L2 (0, T; H-1 (Ω)) de lo cual se tiene que
u $\in$ C ([0, T]; H), w $\in$ C ([0, T]; L2 (Ω)).

Finalmente, se sabe que $\rho\in L\infty$(QT) que verifica (1) implica que $\rho \in$ C ([0, T]; Lp (Ω)) para todo p < ∞
Vamos a considerar X $\subset$ Y son inmersión compacta (X$\subset$ H1, Y $\subset$ L2), K convexo cerrado en Y, a($\cdot$, $\cdot$) forma bilineal continua y coerciva en X x X, y el espacio.

Φ ={ v $\in$ L2(0, T; X) / ∂t v $\in$ L2 (0, T; L6/5 (Ω)),
∇ v $\in$ L∞(0, T; L3/2 (Ω)) }

Decimos que (u, ρ) es una solución fuerte, si

$\rho L\infty$(QT), u $\in \Phi$, con u (t) $\in$ K,
($\rho\, \partial$ t u, v – v) + (ρ (u $\cdot\nabla$)u, v – u) +
a (u, v – u) $\geq$ (ρf, v – u)
$\forall$ v $\in$ L2 (0, T; X), v (t) $\in$ K,

y junto con la ecuación (1) y las condiciones u (0) = u0 y ρ (0) =ρ0 (x)

En la formulación fuerte, tenemos que:

U = (u, w) , U0 = (u0, w0), V=(v, ψ)
F = (f, g), x = V x H_0^1 (Ω), ψ = H x L2 (Ω) ,
K = K1 x K2 ,Φ= Φ1 x Φ2 y a($\cdot$, $\cdot$): X x X$\rightarrow$ IR

Forma bilineal continua (no simétrica) y coerciva definida por:

a(u, v) = a1 (u, v) – 2 μr (rot w, v) + a2(w, ψ) – 2μr (rot u, ψ)

En general, la demostración de la existencia de una solución fuerte es un problema abierto y, entonces estudiaremos una formulación variacional relajada de nuestro problema para definir el concepto de solución débil.-

b) Formulación débil

Decimos que (U, ρ) es una solución débil del problema si $\rho \in L\infty$(QT), U $\in$ L2 (0, T; X) con U (t) $\in$ K y (ρU, U) $\in$ C [0, T]

Satisfaciendo:

$-\int_0^T$ { (ρU, ∂t V)+ (ρ(U $\cdot \nabla$)V, U }
(ρU, V)(T) - (ρ0 U0, V(0))
$\frac{1}{2}$ (ρU, V)(T) + $\frac{1}{2}$ (ρ0 U0, U0)+

$$\int_0^T a(U, V-U) \geq \int_0^T (\rho g F, V-U)$$
$\forall\ V \in \Phi$, $V(t) \in K$ y $V(T) = 0$.

Satisfaciendo la ecuación (1) y las condiciones iniciales:

$\rho(0) = \rho_0 \in \Omega$, $(\rho U, U)(0) = (\rho_0 U_0, U_0)$

Si (ρ, U) es una solución débil y suficientemente regular, entonces es una solución fuerte.

c) Solución muy débil

Decimos que (U, ρ) es una solución débil del problema original si $U \in L^2(0, T; X)$, $U(t) \in K$, $\rho \in L^\infty(Q_T)$,

$$\int_0^T (\rho \partial_t V, V-U) + (\rho u \cdot \nabla, V-U) + a(U, V-U)$$
$$\geq \int_0^T (\rho F, V-U) - \frac{1}{2} \| \rho_0^{1/2} (V(0) - U(0)) \|^2$$
$\forall\ V \in \Phi$, $V(t) \in K$.

Y que además; verifica la ecuación (1) y la condición inicial $\rho(0) = \rho_0(x)$.
Esta fórmula fue estudiada por J.L Lions en [7] para las ecuaciones de Navier-Stokes Non homogéneas.
Si (U, ρ) es una solución muy débil y suficientemente regular, no es claro que (U, ρ) sea una solución débil debido a la presencia del término $\frac{1}{2} \| \rho^{1/2} (V-U) \|^2 (T)$.
En [9] probamos que si $F \in L^2(0, T, Y)$, $U_0 \in Y \cap K$, $\rho_0 \in L^\infty(Q_T)$, $0 < m \leq \rho_0(x) \leq M$, entonces existe al menos una solución débil, es decir en el sentido de la formulación variacional (b).

El estudio de soluciones débiles se realiza usando el método de Galerkin y operadores de penalización.
El operador de penalización transforma el problema original con desigualdad en un problema aproximado con igualdad.
Posteriormente este nuevo problema es estudiado por el método de Galerkin.

Para volver al problema original se usan las propiedades del operador de penalización, junto con las convergencias débiles y fuertes obtenidas con argumentos de compacidad.

Nuestros trabajos difieren principalmente de los mencionados anteriormente en que usamos argumentos de compacidad debido a Simón [10] para controlar el término de convección no-lineal , y los términos resultantes de la integración por partes en el tiempo; que nos permite alcanzar el problema original sin considerar el problema relajado.

Un problema abierto muy interesante es obtener regularidad adicional para la solución débil (principalmente para $\partial_t U$ en $L^2(L^2)$ y ∇U en $L^\infty(L^2)$, lo que permite que una solución débil sea en efecto una solución fuerte.

En el caso de densidad constante, (caso homogéneo), esto es posible en dominios de IR^2 y los argumentos se basan principalmente en dos hechos:

El término de penalización multiplicado por $\partial_t U$ tiene un buen signo.

El término no-lineal puede ser controlado globalmente.

Ahora, la principal dificultad, aún en el caso bidimensional, es el primer punto, ya que en el caso no- homogéneo es necesario un balance preciso entre las estimaciones de Kiselev y Ladyzshenskaya (multiplicando por $\partial_t U$) y estimaciones de Prodi (multiplicando por AU), sin embargo no es claro el comportamiento de penalización por AU.

3. Referencias.

Antonzev,S. N., Kazhikov, A. V., Monokhov, V. N., "Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids", Norht-Holland, Amsterdam, 1990.-
Baiocchi, C., Capelo A., "Variational and quasi-variational inequalities: Applications to the free boundary problems".. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984.
Biroli, M., "Sur e`inéquation d`evolution de Navier-Stokes III", Atti, 52 (1972)m 811-820.

Duvant, G.m Lions, J.L., “Les inequations en Mécanique et en Physique”, Dunod, Paris, 1972.
Glowinsky, R., J.L. Trémolières, R. “Numerical analysis of variational inequalities”, North Holland, 1976.

Khoi,V., Schmitt, K., “On the variational inequalities associated with the Navier-Stokes equations; some bifurcations problems; Differential equations and computational simulations III”, Electronic of Differential Equations Conference, (1997).137-148.

Lions, J.L., “On some problems connect with Navier-Stokes equations, Nonlinear equations, Academic Press. New York, 1978.
Lions, J.L., “Quelques Méthodes de Résolution des problémes aux limits non linéares”, Dunod, Paris, 1969.

F. Guillén-González, M. Poblete, M.A. Rojas-Medar, “On the variational inequalities related to viscous, non –homogeneous incompresssible asymmetric fluids”.
(Pre-printer).
Simon, J., “Compact sets in the space
LP (0, T; B)”. Annali Mat. Pura Appl. , Serie IV, Vol. 146, pp. 65-96, 1987.-