REVISTA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA
18 (2004) 41-45

Aplicación de Poincaré Asociada a una Órbita Homoclínica en un Campo de Vectores Lineales por Partes

Francisco J. Torres[1]

1. Departamento de Matemática, Universidad de Atacama, Copiapó, Chile,
ftorres@matematica.uda.cl

Resumen

En este trabajo se presenta la aplicación de Poincaré asociada a una órbita homoclínica en el origen, para esto usamos el teorema de la función implícita como herramienta principal. También utilizamos los itenerarios dinámicos de los campos de vectores definidos en los distintos sectores del espacio euclidiano. Usando técnicas de autovalores para resolver un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias como también la forma canónica de jordan asociada a la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones.

Palabras claves: Aplicación de Poincaré, Orbita Homoclínica.

Abstract

In this work the application of Poincaré associated to a homoclínica orbit in the origin appears, for this we used the theorem of the implicit function like main tool. Also we used the dynamic itenerarios of the fields of vectors defined in the different sectors from the euclidiano space. Using technical of autovalores to solve a system of three equations ordinary differentials as also the canonical form of jordan associate to the matrix of coefficients of the system of equations.

Keywords: Homoclinic Orbit, Poincaré Map.

---

[1]

1. Introducción

Definición. Un punto de equilibrio p de un campo de vectores X, es dicho un punto homoclínico si existe una trayectoria tiende a p cuando Tal trayectoria es llamada órbita homoclínica através de p y además, es una autoconección de sillas, esto es, p es el conjunto α y ω limite de la órbita.

Orbitas Homoclínicas en 0.

Sea u_1 un real positivo y u_2, u_3 reales negativos o complejos conjugados con parte real negativa.

Como los autovalores asociados a los u_i son dados por

$c_i = (1, u_i, u_i^2), i = 1,2,3$. Entonces tenemos una variedad estable 2-dimensional $W^s(0)$ y una variedad inestable 1-dimensional $W^u(0)$ en el punto de equili-
brio 0=(0,0,0) , dadas por

$$W^u(0) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = r\overrightarrow{0c_1}, \alpha\, \vec{x} - 1 > 0 \right\}$$

$$W^s(0) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = r\overrightarrow{0c_2} + r'\overrightarrow{0c_3}, \alpha\, \vec{x} - 1 \le 0 \right\}$$

Donde $r, r' \in \mathbb{R}$ y $\vec{x} = (x, y, z)$.

Observación: Las variedades invariantes asociadas al punto crítico 0 están definidas de tal modo que todo punto perteneciente a una de ellas es una combinación lineal de los autovectores correspondientes a los autovalores que general el espacio.
i

Lema: Sean V_1 definidos en [2] y el vector dado por $u = \left(0, \dfrac{u_2 + u_3}{u_2 u_3}, \dfrac{-1}{u_2 u_3} \right)$, entonces

$$W^s(0) \cap V_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : u^t \vec{x} = 1, x = 1 \right\}$$

Demostración:

Sea $\vec{x} \in W^s(0)$ entonces $\vec{x} = r\overrightarrow{0c_2} + r'\overrightarrow{0c_3}$ y $\alpha^t x \le 1$ y si $\vec{x} \in V_1$ entonces $\alpha^t \vec{x} = 1$, por lo tanto

$$\alpha^t \vec{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \qquad [1]$$

Como $\overrightarrow{0c_i} = \left(1, u_i, u_i^2\right)^t$ entonces tenemos

$$\vec{x} = \left(r + r' \quad ru_2 + r'u_3 \quad ru_2^2 + r'u_3^2 \right)^t \qquad [2]$$

Sustituyendo [2] en [1] se obtiene la relación

$$r + r' = 1$$

Resta probar que $u^t \vec{x} = 1$

$$u^t \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{u_2 + u_3}{u_2 u_3} & \dfrac{-1}{u_2 u_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{u_2 + u_3}{u_2 u_3} y - \frac{z}{u_2 u_3} =$$

$$= \frac{u_2 + u_3}{u_2 u_3}\left(ru_2 + r'u_3\right) - \frac{\left(ru_2^2 + r'u_3^2\right)}{u_2 u_3} =$$

$$= r + r' = 1$$

por lo tanto $u^t \vec{x} = 1$ y de esto se sigue el resultado.

2. Itenerarios Dinámico de Orbitas Homoclínicas

En esta sección se muestran diversos tipos de órbitas homoclínicas asociadas al origen y condiciones necesarias sobre las aplicaciones de retorno para su existencia.

Tipo 1. $0 \to V_1 \to V_1 \to 0$

En este caso se satisfacen las siguientes condiciones

$$\alpha^{t} e^{Cs_0} c_1 = 1$$
$$u^{t} e^{Cs_0} c_1 = 1$$

Donde la matriz C está definida en [1,2], con las condiciones en la aplicación de retorno

$$\alpha^{t} e^{Cs} c_1 \neq 1 \qquad \forall\, s \ con\ 0 < s < s_0$$
$$\alpha^{t} e^{As} e^{Cs_0} c_1 \neq 1 \qquad \forall\, s > 0$$

La condición a) dice que el campo de vectores definido sobre el plano V_1 aplicado al punto c_1 corta en un tiempo s_0 a este plano.

La condición b) obliga al punto $p = e^{Cs_0} c_1$ a pertenecer a $V_1 \cap W^s(0)$.

La condición c) dice que s_0 es el menor tiempo tal que el campo intersecta V_1.

La condición d) garantiza la existencia de la órbita homoclínica, pues, para cualquier $t > 0$, $e^{At} \notin V_1$ y por lo tanto este converge al punto periódico 0 cuando t tiende a infinito, sobre la variedad estable.

Tipo 2. $0 \to V_1 \to V_1 \to V_1 \to V \to 0$

En este caso tenemos que $x = K(t_1, s_1) h_1$, dados en [Torres] y las siguientes condiciones se cumplen

$$\alpha^{t} e^{Cs_0} c_1 = 1$$
$$e^{Cs_0} c_1 = e^{-At_0} K(t_1, s_1) h_1$$
$$u^{t} e^{Cs_1} K(t_1, s_1) h_1$$

Con condiciones en la aplicación de retorno

$$\alpha^{t} e^{Cs} c_1 \neq 1 \qquad \forall\, 0 < s < s_0$$
$$\left|\alpha^{t} e^{-At} x\right| \neq 1 \qquad \forall\, 0 < t < t_0$$
$$\alpha^{t} e^{Cs} x \neq 1 \qquad \forall\, 0 < s < s_1$$
$$\left|\alpha^{t} e^{At} e^{Cs_1} x\right| \neq 1 \qquad \forall\, t > 0$$

Estas formulas se interpretan en forma similar al tipo 1.

Tipo 3. $0 \to V_1 \to V_1 \to V_{-1} \to V_{-1} \to 0$

En este caso tenemos que $y = K(t_1, s_1) h_2$ está definida en [Torres] y se cumplen las siguientes relaciones

$$\alpha^{t} e^{Cs_0} c_1 = 1$$
$$e^{Cs_0} c_1 = -e^{-At_1} y$$
$$u^{t} e^{Cs_1} y = 1$$

Con condiciones en la aplicación de retorno

$$\alpha^{t} e^{Cs} c_1 \neq 1 \qquad \forall\ 0 < s < s_0$$
$$\left|\alpha^{t} e^{-At} y\right| \neq 1 \qquad \forall\ 0 < t < t_1$$
$$\alpha^{t} e^{Cs} y \neq 1 \qquad \forall\ 0 < s < s_1$$
$$\left|\alpha^{t} e^{At} e^{Cs_1} y\right| \neq 1 \qquad \forall\ t > 0$$

3. Aplicación de Poincaré Asociada a una Orbita

3.1. Homoclínica.

En esta sección se muestra la aplicación de Poincaré en una órbita homoclínica, para esto se escoge un itinerario del tipo 1.

El campo definido entre las regiones V_1 y V_{-1} que llamaremos de R_0, tiene asociado un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias $\vec{x}' = A\vec{x}$ donde $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ y sus autovalores son $\lambda_1 = \sigma + i\omega$, $\lambda_2 = \sigma - i\omega$ y $\lambda_3 = \gamma$ donde $-\sigma > 0$ y $\gamma > 0$, así, existe un sistema de coordenadas tal que A es trasformada en su forma de Jordan J, esto es,

$$J = \begin{pmatrix} \sigma & -\omega & 0 \\ \omega & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

La variedad estable $M = W^s(0)$ es transformada en el plano xy y la variedad inestable $W^u(0)$ es transformado en el eje z [Arneodo et al]. En este nuevo sistema de coordenadas, el sistema de ecuaciones es dado por

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \sigma & -\omega & 0 \\ \omega & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \vec{x}$$

Así,

$$\begin{aligned} x' &= \sigma x - \omega y \\ y' &= \omega x + \sigma y \\ z' &= \gamma z \end{aligned}$$

Tomando coordenadas cilíndricas con r como coordenada radial y $-\pi \leq \theta \leq \pi$ como coordenada

Angular de cualquier punto $p = (x, y)$, tenemos que la solución del sistema para condiciones iniciales (r_0, θ_0, z_0) es dado por

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0 e^{\sigma t} \\ \theta(t) &= \theta_0 + \omega t \\ z(t) &= z_0 e^{\gamma t} \end{aligned}$$

Por lo tanto el flujo en la región D_0, que es la región dada por la tranformación aplicada a R_0, es

$$\varphi_t(r, \theta, z) = \begin{cases} r_0 e^{\sigma t} \\ \theta_0 + \omega t \\ z_0 e^{\sigma t} \end{cases}$$

Definimos, entonces Σ_0 como una sección transversal al flujo en la variedad inestable $W^u(0)$, a una altura $\tilde{t} = h$ y Σ_1 una sección bidimensional de modo que intersecte la variedad estable $W^s(0)$. Se quiere determinar una aplicación φ de Σ_1 en Σ_0. Una trayectoria partiendo de $p_0 = (r_0, 0, z_0)$ en Σ_1 intersecta Σ_0 en un tiempo $\tilde{t}$, donde la tercera coordenada del flujo φ_t es igual a h, esto es, cuando $z_0 e^{\gamma \tilde{t}} = h$, entonces

$$\tilde{t} = \frac{1}{\gamma} \ln\left(\frac{\gamma}{z_0} \right)$$

lurgo la aplicación

$\varphi : \Sigma_1 \to \Sigma_0$

Es dada por

$$\varphi(r_0, 0, z_0) = \left(r_0 \left[\frac{h}{z_0} \right]^{\frac{\sigma}{\lambda}}, \theta_0 + \frac{\omega}{\gamma} \ln\left[\frac{h}{z_0} \right], h \right)$$

Y definiendo $\varphi(r) = p$ donde r es el punto donde se intersectan la variedad estable en cero y la sección Σ_0 y p es el punto se intersección entre la variedad inestable y la sección Σ_0.

Ahora se quiere determinar una aplicación ψ de una vecindad v_s de s en Σ_1, esto es suficiente, pues la aplicación de Σ_0 a v_s es dada por la composición de los flujos asociados a los campos definidos en las regiones D_0 y D_1, donde esta última región se obtiene aplicando la transformación a la región que está sobre el plano V_1.

Sea $x_0 = s \in v_s$ y suponga que existe t_0 tal que $\varphi_{t_0}(s) = r$, entonces se define

$F : v_s \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to$ ¡

Por

$$F(x,t)=\pi_2(\varphi_t(x))-r$$

Donde $\varphi_t(x)$ es el flujo asociado al campo en la región D_0 y π_2 es la proyección en la segunda coordenada.
Como

$$F(x_0,t_0)=0 \quad \text{y} \quad DF(x_0,t_0)=rf(s)$$

Donde f es el campo de vectores y s no es un punto crítico de f, entonces $DF(x_0,t_0)\neq 0$. Así, por el teorema de las funciones implicitas, existe una vecindad $\tilde{v}_s\subset v_s$ de s y una función
$t:\tilde{v}_s\to$ ¡

Tal que

$$F(x,t(x))=0 \quad \text{en} \quad t(s)=t_0$$

Ahora se define

$$f=\tilde{v}_s\to\Sigma_1$$

Por

$$f(x)=\pi_2(\varphi_{t(x)}(x))$$

Por lo tanto, la aplicación $\psi:\Sigma_0\to\Sigma_1$ es dada por la composición

$$\psi=f\circ\rho\circ\varphi$$

Donde $\rho:\Sigma_0\to v_s$ es la composición de los flujos asociados a los campos definidos en las regiones D_0 y D_1 y satisfacen las siguientes condiciones

$$\varphi_{t'}(p)=q \qquad t'>0$$
$$\rho_{t''}(q)=s \qquad t''>0$$

Así

$$\psi(p)=r \qquad p\in\Sigma_0,\ r\in\Sigma_1$$

Pues,

$$\begin{aligned}\psi(r)&=f(\rho(\varphi(p)))=f(\rho(q))\\&=f(s)=\pi_2(\varphi_{t(s)}(s))\\&=\pi_2(\varphi_{t_0}(s))=F(s,t_0)+r\\&=r\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que la aplicación de Poincaré asociada a esta órbita homoclínica es dada por la composición

$$\pi=\varphi\circ\psi:\Sigma_0\to\Sigma_0$$

La cual tiene un punto fijo, pues, sea $p\in\Sigma_0$, entonces

$$\pi(p)=\varphi(\psi(p))=\varphi(r)=p$$

4. Conclusiones

En los itenerarios homoclínicos siempre es posible definir una aplicación de Poincaré mediante las técnicas usadas en la sección anterior, ahora la pregunta es qué tipo de técnicas de debe usar para definir el mismo tipo de aplicación en una órbita heteroclínica, que es una conección de puntos de silla.

5. Referencias

Arneodo et al., (1981). Possible new strong attractors with spiral structure. Commun. Math. Physics. 79

Torres F.J. (2003). Orbitas Periódicas en un Campo de Vectores Lineales por Partes. Revista de la Facultad de Ingeniería. 16. Universidad de Atacama.

Torres F.J. (2004) Bifurcación de Orbitas Periódicas en un Campo de Vectores Lineales por Partes. Revista de la Facultad de Ingeniería. 17. Universidad de Atacama.