REVISTA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA
www.ingenieria.uda.cl
22 (2008) 46-51

Ecuaciones de evolución como ecuaciones integrales

Gonzalo Astorga[1] y Luciano Barbanti[2]

1. Departamento de Matemáticas, Universidad de Atacama. Copiapó, Chile
2. E-mail: gonzalo.astorga@uda.cl
3. Instituto de Matemáticas & Estadística, Universidad de Sao Paulo, Brasil

---

Resumen

Este trabajo trata sobre las ecuaciones de evolución (E) introducidas por T. Kato y Y. Yosida en la década del 50. Se muestra como una ecuación de evolución lineal (E) se escribe como una ecuación del tipo Volterra-Stieltjes (K) definidas por C.S. Hönig en la década del 70.

Palabras claves: Ecuaciones de evolución, Ecuaciones integrales de Volterra-Stieltjes, semigrupos de operadores

---

Abstract

This work deals with the Evolutive Equations (E) by T. Kato and K. Yosida in the 1950's. We show as an Linear Evolutive Equations (E) is written as an equation Volterra-Stieltjes type (K), defines by C. S. Hönig in the 1970's.

Keywords: Evolution equation, Volterra-Stieltjes integral equation, Semigroup of linear operator.

1. Conceptos Previos

1.1 La integral interior

Las demostraciones de los resultados que se enuncian a continuación pueden ser encontradas en las referencias [1], [2], [3] y [4], donde son hechas de manera general. Aquí utilizaremos casos particulares apropiados al trabajo

Sea X un espacio de Banach y $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$.

Definición 1.1: Una función $f : [0,T] \to X$ se dice regulada si, $\forall t \in [0,T) \quad (t \in (0,T])$ existen los límites

$$f(t_+) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(t+\varepsilon)\ ,\ f(t_-) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(t-\varepsilon)$$

Se Denota por $G([0.T], X)$ al espacio de las funciones reguladas $f : [0,T] \to X$ con la norma

$$\|f\| = \sup_{t \in [0,T]} \{\|f(t)\|\}$$

Definición 1.2: Para $f \in G([0.T], X)$ se define $f^-(t) = f(t-)\ si\ 0 < t \leq T$ y

$f^-(0) = f(0+)$ y se escribe

$$G^-([0,T], X) = \left\{ f \in G([0,T], X) : f^- = f \right\}$$

este es un subespacio vectorial cerrado de $G([0.T], X)$.

Definición 1.3: La semivariación de una función $\alpha : [0,T] \to L(X,Y)$ se define por

$$SV[\alpha] = \sup_{d \in D_{[0,T]}} SV_d[\alpha]$$

Donde

$$SV_d[\alpha] = \sup_{\|x_i\| \leq 1} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] x_i \right\| ; x_i \in X \right\}$$

Definición 1.4: Sea $d \in D_{[0,T]}$, una partición de $[0,T]$, d' se dice mas fina que d $(d' \geq d)$ si todo punto t_i de d es un punto de d'.

Definición 1.5: Sean $\alpha : [0,T] \to L(X,Y)$ y $f : [0,T] \to X$ entonces se define la integral interior (integral de Dushnik) por

$$\int_0^T \cdot d\alpha(t) \cdot f(t) = \lim_{d \in D_{[0,T]}} \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i)$$

con $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$, si el límite existe.

Teorema 1.6: (1.10 de [2]) Si $\alpha \in SV([0,T], L(X,Y))$ y $f \in G([0,T], X)$ entonces existe la integral

$$\int_0^T \cdot d\alpha(t) \cdot f(t)$$

y se tiene que

$$\left\| \int_0^T \cdot d\alpha(t) \cdot f(t) \right\| \leq SV[\alpha] \left\| f^- \right\|$$

Donde $f^-(t) = f(t-), t \in (0,T]$

1.2 Representación de Aplicaciones Lineales.

Ecuaciones Integrales.

Sean $f \in G([0,T], X)$ y $\alpha \in SV_0([0,T], L(X,Y))$, se define

$$F_\alpha(f) = \int_0^T \cdot d\alpha(t) \cdot f(t)$$

Así, para cada α, se obtiene una aplicación lineal

$$F_\alpha : G([0,T], X) \to Y$$

Teorema 1.7: (1.11 de [2]) La aplicación $H : SV_0([0,T], L(X,Y)) \to L(G^-([0,T], X), Y)$ definida por $H(\alpha) = F_\alpha$ es una isometría, esto es, $\|F_\alpha\| = SV[\alpha]$.

Además,

$$\alpha(t) \cdot x = F_\alpha[\chi_{(0,t)} \cdot x]$$

para $x \in X$ y $0 < t \leq T.$

Definición 1.8: La función $f : [0,T] \to L(X,Y)$ se dice simplemente regulada y se denota por $f \in G^\sigma([0,T], L(X,Y))$ si para todo $x \in X$, $f \cdot x \in G([0,T], Y)$, donde

$$f \cdot x(t) = f(t)x, t \in [0,T]$$

Notación 1.9: Para $K : [0,T]^2 \to L(X,Y)$, se denota por K^t y K^s las aplicaciones definidas por

$$K^t(s) = K(t,s) = K_s(t)$$

Se dice que K satisface las condiciones

(G), si K es regulada como función de la primera variable, esto es, $\forall s \in [0,T]$, se tiene que

$$K_s \in G([0,T], L(X,Y))$$

(G^σ), si K es simplemente regulada como función de la primera variable, esto es, $\forall s \in [0,T]$, se tiene que

$$K_s \in G^\sigma([0,T], L(X,Y))$$

(SV^u), si K es uniformemente de semivariación limitada como función de la segunda variable, esto es

$$SV^u[K] = \sup_{0 \leq t \leq T} SV[K^t] < \infty$$

G_0^σ, si satisface (G^σ) y $K(t,s) = 0$ para $s \geq t$.

Cuando $Y = X$ se dice que K satisface (G_I^σ), si satisface (G^σ) y $K(t,s) = I_X$ para $s \geq t.$

Definición 1.10: Sea K satisfaciendo (G_0^σ) y (SV^u), se escribe

$$K \in G_0^\sigma \cdot SV^u([0,T]^2, L(X,Y))$$

Para $f \in G([0,T], X)$, se define

$$(kf)(t) = \int_0^t \cdot dsK(t,s) \cdot f(s), \ 0 \leq t \leq T.$$

Definición 1.11: Un operador $P \in L(G([0,T], X), G([0,T], Y))$ se dice Causal si $\forall f \in G([0,T], X)$ y $c \in [0,T]$

$$f\big|_{[0,c]} \equiv 0 \Rightarrow (Pf)\big|_{[0,c]} \equiv 0$$

Teorema 1.12: (2.10 de [2] La aplicación

$$J : G_0^\sigma \cdot SV^u([0,T]^2, L(X,Y)) \to L(G^-([0,T], X), G([0,T], Y)$$

definida por $J(K) = k$ es una isometría del primer espacio de Banach sobre el subespacio de los operadores causales del segundo espacio, esto es,

$$\|k\| = SV^u[K]$$

Además, si $x \in X,\ 0 < t \leq T$, entonces

$$K(t,s)x = -k[\chi_{(s,t)}x](t)$$

y para $t \in [0,T]$, se tiene

$$K(t,0)x = -k[\chi_{(0,t)}x](t)$$

Teorema 1.13: (Teor. de Bray, II.1.1 de [1])

Sea $\alpha \in SV([0,T], L(X,Y))$ y $K \in G^\sigma \cdot SV^u([0,T]^2, L(W,X))$, si $g \in G([0,T], W)$, definiendo

$$(F_\alpha K)(s) = {}^\sigma\int_0^T \cdot d\alpha \circ K(t,s)$$

entonces

a) $F_\alpha K \in SV([0,T], L(W,Y))$

b) $SV[F_\alpha K] \leq SV[\alpha] \cdot SV^u[K]$

y

c) $$\int_0^T \cdot d_s \left[{}^{\sigma}\int_0^T \cdot d\alpha(t) \cdot K(t,s) \right] \cdot g(s)$$

$$= \int_0^T \cdot d\alpha(t) \left[\int_0^T \cdot d_s(t) \cdot K(t,s) \cdot g(s) \right]$$

2. Ecuaciones de Evolución Lineales y EIVS

2.1 Representación de un tipo de ecuaciones lineales como EIVS

Antes de representar las ecuaciones lineales como ecuaciones integrales, en la siguiente proposición se hace una pequeña adaptación en un operador acotado, para poder usar los resultados de la teoría de EIVS.

Proposición 2.1: Sean X y Z espacios de Banach $A \in L(Z,X)$ y $f \in G^{-}([0,T],Z)$ definiendo

$$\left[\hat{A}f\right](t) = Af(t),\ 0 \le t \le T$$

Se tiene que

$$\hat{A} \in L(G^{-}([0,T],Z), G([0,T],X))$$

y

$$\left\|\hat{A}\right\| = \|A\|$$

Demostración. $\hat{A}f \in G([0,T],X)$, pues es la composición entre una función regulada con una aplicación continua; claramente $\hat{A}$ es lineal. Por otro lado,

$$\begin{aligned}\left\|\hat{A}\right\| &= \sup_{\|g\|\le 1}\left\|\hat{A}g\right\| \\ &= \sup_{\|g\|\le 1}\sup_{0\le t\le T}\left\|\left(\hat{A}g\right)(t)\right\| \\ &= \sup_{\|g\|\le 1}\sup_{0\le t\le T}\|Ag(t)\| \\ &= \sup_{\|x\|\le 1}\|A(x)\| = \|A\|\end{aligned}$$

o sea,

$$\hat{A} \in L(G^{-}([0,T],Z), G([0,T],X))$$

Sea ahora $z_0 \in Z$ tal que $\|z_0\| \le 1$ y definiendo $g(s) = z_0$, $s \in [0,T]$ entonces $\|g\| \le 1$ y claramente $g \in G^{-}([0,T],Z)$ así, se obtiene $\|Az_0\| = \left\|\hat{A}g\right\| \le \left\|\hat{A}\right\|,\ \|z_0\| \le 1$

luego

$$\|A\| \le \left\|\hat{A}\right\|$$

por lo tanto

$$\|A\| = \left\|\hat{A}\right\|$$

Considere ahora la ecuación diferencial no homogénea

$$(E)\quad \begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = A(t) + f(t),\ 0 \le t \le T \\ u(t_0) = u_0 \qquad\qquad ,\ u_0 \in Z \end{cases}$$

con $A(t) \in L(Z,X)$, $u \in G^{-}([0,T],Z)$ y $f \in G([0,T],X)$

Teorema 2.2: La ecuación (E) es equivalente a una ecuación integral de Volterra-Stieltjes del tipo (K):

$$(K)\quad u(t) - u(0) = \int_0^t \cdot d_s K(t,s) \cdot u(s) + g(t)$$

donde

$$K(t,s) = \begin{cases} -\int_s^t A(\tau)d\tau & ,0 \le s \le t \le T \\ 0 & ,0 \le t \le s \le T \end{cases}$$

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

Demostración. Sea $h \in G^{-}([0,T],Z)$ tal que $h|_{[0,t_0]} = 0$ con $t_0 \in [0,T]$. Si $\tau \in [0,t_0]$ entonces

$$[\hat{A}(t)h](\tau) = A(t)h(\tau) = 0$$

o sea, $[\hat{A}(t)h]|_{[0,t_0]} = 0$, por lo tanto $\hat{A}(t)$ es un operador causal. Luego, por el teorema 1.1.2, existe

$$\hat{M} \in G_0^{\sigma} \cdot SV^{u}([0,T]^2, L(Z,Y))$$

tal que

$$[\hat{A}(t)u](\tau) = \int_0^t \cdot d_s \hat{M}(t)(\tau,s) \cdot u(s) \tag{1}$$

donde $u \in G^{-}([0,T],Z)$, además

$$\hat{M}(t)(\tau,s)z = -[\hat{A}(t)(\chi_{(s,\tau]}z](\tau)$$

donde $0 \le s \le \tau \le T$ y $z \in Z$

$$\hat{M}(t)(\tau,0)z = -[\hat{A}(t)(\chi_{(0,\tau]}z](\tau)$$

donde $0 \le \tau \le T$ y $z \in Z$
y

$$\hat{M}(t)(\tau,s)z = 0, \; si \;\; 0 \le \tau \le s \le T$$

Así, se tiene que

$$\hat{M}(t)(\tau,s) = \begin{cases} -A(t) & , 0 \le s \le \tau \le T \\ 0 & ,0 \le \tau \le s \le T \end{cases}$$

Para $\tau = t$, se define $M(t,s) := \hat{M}(t)(t,s)$ y de 2.1 se tiene que

$$A(t)u(t) = \int_0^t \cdot d_s M(t,s) \cdot u(s) \tag{2}$$

Así, de la ecuación (E) y de 2.2, se obtiene

$$\frac{du(t)}{dt} = \int_0^t \cdot d_s M(t,s) \cdot u(s) \qquad u(t) = u_0 \tag{3}$$

Integrando esta ecuación, se tiene

$$u(t) - u_0 = \int_0^t \left[\int_0^T \cdot d_s M(\tau,s) \cdot u(s) \right] d\tau + g(t) \tag{4}$$

donde $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$

Sea $\alpha(t) = tI$, donde I es la identidad en X, entonces

$$\int_0^t \left[\int_0^T \cdot d_s M(\tau,s) \cdot u(s) \right] d\tau = \int_0^t \cdot d\alpha(\tau) \left[\int_0^T \cdot d_s M(\tau,s) \cdot u(s) \right]$$

$$= \int_0^t \cdot d\alpha(\tau) \left[\int_0^t \cdot d_s M(\tau,s) \cdot u(s) \right]$$

y por el teorema (1.14) se tiene que

$$\int_0^t \cdot d\alpha(\tau) \left[\int_0^t \cdot d_s M(\tau,s) \cdot u(s) \right] = \int_0^t \cdot d_s \left[{}^{\sigma}\int_0^t \cdot d\alpha(\tau) M(\tau,s) \right] \cdot u(s)$$

$$= \int_0^t \cdot d_s \left[\int_0^t M(\tau,s) d\tau \right] \cdot u(s)$$

Haciendo $K(t,s) := \int_0^t M(\tau,s) d\tau$, se tiene

$$K(\tau,s) = \begin{cases} -\int_s^t A(t) d\tau & , 0 \le s \le t \le T \\ 0 & ,0 \le t \le s \le T \end{cases}$$

Así, la ecuación (2.4) queda como sigue

$$u(t) - u_0 = \int_0^t \cdot d_s K(t,s) \cdot u(s) + g(t) \tag{5}$$

O sea, una EIVS del tipo (K) y así se prueba el resultado.

3. Referencias

[1] Hönig, C.S. Volterra-Stieltjes Integral Equations, Mathematical Studies, 16, North Holland Press, 1975.
[2] Hönig, C.S. Volterra-Stieltjes Integral Equations, LNM 799, Springer-Verlag, pp. 173-216, 1979.
[3] Hönig, C.S. The Adjoint of a Linear Volterra-Stieltjes Equation, LNM 957, Springer-Verlag, pp 110-125, 1982.
[4]Hönig, C.S. Equations Integrals Generalizes anr T Applications. Seminairies Mathematique D'Orsay, nº 5, 1982.
[5]Kato, T. Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, New York, 1984.
[6]Yosida, K. On the Integration of the Equation of Evolution, Journal of Faculty of Science Univ of Tokyo, Vol IX, 5, pp 397-402, 1963.