REVISTA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA
www.revistaingenieria.uda.cl

24 (2010) 1-4

ATRACTOR GLOBAL EN UNA ECUACIÓN LOGÍSTICA

Rubén M. Rojas, Francisco J. Torres

Departamento de Matemáticas – Universidad de Atacama
Av. Copayapu 485, Copiapó
ftorres@matematica.uda,cl

RESUMEN

En este artículo se estudia la existencia del atractor global en un modelo de población en un determinado espacio de Banach de potencias fraccionarias usando teoría de semigrupos de operadores y aplicando los resultados de Cholewa y Dlotko.

Palabras claves: Semigrupo de operadores, atractor global restricto, ecuaciones diferenciales parabólicas.

ABSTRACT

In this article we study the existence of global attractor in the population model in the suitable Banach Space of fractional power for using semigroup of operator and using the result of Cholewa and Dlotko.

Keywords: Semigroup of operator, global attractor, parabolic differential equations.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta un modelo de reacción-difusion que representa la evolución de una población. Los sistemas de reacción-difusión pueden modelar procesos dinámicos aplicados a ciencias como biología, geología, física, etc., y esta formulación matemática se representa por ecuaciones parciales parabólicas.

2. DEFINICIONES

Definición 1. Sea X un espacio de Banach y $L(X)$ una colección de operadores lineales acotados en X, $T(t)$ se dice semigrupo de operadores si $T(t) \in L(X)$, $\forall t \in R^+$ y

a) $T(0) = I$ (operador identidad)

b) $T(t+s) = T(t)T(s)$, $s,t \in R^+$

Definición 2. Un operador A en un espacio de Banach X se dice Sectorial si es un operador cerrado densamente definido tal que, para algún φ en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y algún $M \geq 1$ y un real a, el sector

$S_{a,\varphi} = \left\{ \lambda / \varphi < \left| \arg(\lambda - a) \leq \pi, \lambda \neq a \right| \right\}$

está en el conjunto resolverte de A y

$$\left\| (\lambda - A)^{-1} \right\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \qquad \forall \lambda \in S_{a,\varphi}$$

Definición 3. Un semigrupo $T(t) : S_{a,\varphi} \cup \{0\} \to L(X)$ se dice semigrupo analítico si

1) $T(t)w \to w$ cuando $t \to 0$, $\forall w \in X$

2) $t \to T(t)w$ es analítica, $\forall w \in X$

Teorema [3]. Si A es un operador sectorial, entonces –A genera un semigrupo analítico $\left\{ e^{-tA} \right\}_{t \geq 0}$

Definición 2 [3]. Si A es sectorial en un espacio de Banach X, se define para cada $\alpha \geq 0$

$$X^\alpha = D(A^\alpha)$$

$$\|x\|_\alpha = \left\| A^\alpha x \right\| \quad , \qquad x \in X^\alpha$$

y $(X^\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ es un espacio de Banach.

3. PROBLEMA

Considere la ecuación logística difusiva semilineal

$$u_t - \delta u_{tt} - g(x)u + u^2 = 0 \tag{1}$$

$$0 < x < 1 \quad , \quad \delta > 0$$

$$u(t,x) = u_0 \qquad x = 0,1 \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0 \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{3}$$

La función logística u es la densidad poblacional, el parámetro $\delta > 0$ es la tasa de difusión de la población, el término $-u^2$ corresponde al hecho de que la población se autolimita y la función $g(x)$ es la tasa de natalidad.

Sean $A = \delta u_{xx}$, $L^2(0,1)$ el espacio de face y $g \in L^\infty(0,1)$.

A es un operador sectorial, entonces $-A = \delta u_{xx}$ genera un semigrupo analítico en $L^2(0,1)$, entonces podemos definir las potencias fraccionarias X^α con $0 < \alpha < 1$, donde $X^0 = L^2$ y $X^1 = D(A)$. $X^\alpha = D(A^\alpha)$ es un espacio de Hilbert con norma $\|u\|_\alpha = \left\| A^\alpha u \right\|_X$.

La ecuación de evolución asociada a (1), (2) y (3) es:

$$\begin{aligned} u' + Au &= F(u) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \tag{4}$$

donde $F : X^\alpha \to X$ es dada por $F(u)(x) = g(x)u(x) - u^2(x)$.

La ecuación (1), (2) y (3) define un sistema dinámico en $X^{1/2} = H_0^1(0,1)$.

1.- Si $\alpha \in \left[\frac{1}{2},1\right)$ F es Lipschitz continua en subconjuntos limitados de X^{α} pues

$$\|F(u)-F(v)\|_2 = \|g(x)u-u^2-g(x)v-v^2\|_2$$
$$\leq C(\|g\|_{\infty}+\|u+v\|_2)\|u-v\|_{\alpha} \tag{5}$$

Los siguientes resultados se deben a Cholewa y Dlotko.

2.- Sea $\alpha \in \left[\frac{1}{2},1\right)$ y $T(t)$ el semiflujo local generado por A^{α}, donde A tiene resolverte compacto. Existe un atractor global resricto para $T(t)$ en X^{α} si tenemos

$$\exists c>0 \qquad \forall u_0 \in V \qquad \forall t \in (0,t_{\max}(u_0))$$
$$\|T(t)\| \leq c \tag{6}$$

y

$$\exists \theta \in [0,1) \quad \forall u_0 \in V \quad \forall t \in (0,t_{\max}(u_0))$$
$$\|F(T(t)u_0)\|_X \leq g(\|T(t)u_0\|_Y)(1+\|T(t)u_0\|_{X^{\alpha}}^{\theta}) \tag{7}$$

donde $V \subseteq X^{\alpha}$ es cerrado, no vacío y positivamente invariante, $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ es no decreciente.

4. EXISTENCIA DEL ATRACTOR

De (4) tenemos que

$$\|F(u)\|_2 = \|g(x)u-u^2\|_2$$
$$\leq c_1\|g\|_{\infty}\|u\|_2 + c_2\|u\|_2^2$$
$$\leq c_1\|g\|_{\infty}\|u\|_{1/2} + c_2\|u\|_{1/2}^{3/2}\|u\|_{1/2}^{1/2}$$
$$\leq \left[c_1\|g\|_{\infty}\|u\|_{1/2}^{1/2} + c_2\|u\|_{1/2}^{3/2}\right]\left[1+\|u\|_{1/2}^{1/2}\right] \tag{8}$$

Con $\theta = \frac{1}{2}$, $Y = X^{1/2}$ y $D(A) \subseteq Y$

Ahora necesitamos una estimativa en la $X^{1/2}$ norma de $T(t)u_0$ esto es

$$\|T(t)u_0\| \leq R \qquad u_0 \in B_{X^{1/2}}(0,\eta)$$

Por la fórmula de variación de constantes, se obtiene la solución mild de (4)

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A}F(u(s))ds \tag{10}$$

donde $T(t)$ es semigrupo y λ_1 el primer autovalor de $-u_{xx}$, entonces aplicando la $X^{1/2}$ norma a (10) y usando el teorema 1.4.3. de Henry, tenemos

$$\|u(t)\|_{1/2} \leq \|e^{-At}u_0\|_{1/2} + \int_0^t \|e^{-(t-s)A}F(u(s))\|_{1/2} ds$$
$$\leq e^{-\delta\lambda_1 t}\|u_0\|_{1/2} + c\int_0^t (t-s)^{1/2} e^{-\delta\lambda_1(t-s)}\|F(u(s))\|_2 ds \tag{11}$$

Ahora, usando la desigualdad de Young tenemos

$$\|F(u)\| \leq \frac{M^2}{2\varepsilon}\|g\|_{\infty} + m(2\varepsilon+M)\|u\|_{1/2}^2$$

Así, de (11)

$$\|u\|_{1/2}^2 \leq$$
$$\|u_0\|_{1/2} + c\frac{M^2}{2\varepsilon}\|g\|_{\infty} + cm(2\varepsilon+M)\|u\|_{1/2}^2 \int_0^t \omega^{-1/2} e^{-\delta\lambda_1\omega} ds$$

$$\leq \|u_0\|_{1/2} + c\frac{M^2}{2\varepsilon}\|g\|_{\infty} + cm(2\varepsilon+M)\|u\|_{1/2}^2 (\delta\lambda_1)^{-1/2}\Gamma(1/2)$$

llamando $r = \|u(t)\|_{1/2}$ tenemos

$$r \leq Ar^2 + \|u_0\|_{1/2} + B \tag{12}$$

el discriminante de esta ecuación cuadrática debe ser positivo, así

$$\|u_0\|_{1/2} < \frac{(\delta\lambda_1)^{1/2}}{4cm(2\varepsilon+M)\Gamma(1/2)} - \frac{cM^2\|g\|_\infty}{2\varepsilon}$$

esta cantidad es positiva si la norma de g cumple la siguiente condición

$$\|g\|_\infty < \frac{\varepsilon(\delta\lambda_1)^{1/2}}{2c^2 mM^2(2\varepsilon+M)\Gamma(1/2)}$$

entonces, el radio η es dado por

$$\eta = \frac{(\delta\lambda_1)^{1/2}}{4cm(2\varepsilon+M)\Gamma(1/2)} - \frac{cM^2\|g\|_\infty}{2\varepsilon}$$

Por lo tanto, si u_0 es tomado en la bola $B_{X^{1/2}}(0,\eta)$ y por la continuidad de $T(t)u_0$ en $X^{1/2}$ la norma $\|T(t)u_0\|_{1/2}$ nunca es mayor que la menor raíz de la ecuación dada en (12). Así

$$\|T(t)u_0\|_{1/2} \leq \frac{1-\sqrt{1-4A(\|u_0\|_{1/2}+B)}}{2A}$$

$$\leq \frac{(\delta\lambda_1)^{1/2}}{2cm(2\varepsilon+M)\Gamma(1/2)} = R$$

Así, por el resultado de Cholewa y Dlotko, existe un atractor global restricto Λ en $X^{1/2}$.

5. REFERÉNCIAS

[1] J. Cholewa, J., Dlotko, T. Attractor for Navier-Stokes systems. Hiroshima Journal of Mathematics, 28, 1998.

[2] Hale, J. K. Asymptotic behavior of dissipative systems. American Survey and Monographs, 25, 1988.

[3] Henry, D. Geometrics theory of semilinear parabolics equations. LNM 840, Springer-Verlag.