



IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS SISO LTI A PARTIR DE SU DEFINICIÓN MATEMÁTICA

Manuel Olivares Ávila; José Gallardo Arancibia

¹Departamento de Ingeniería de Sistemas y Computación, Universidad Católica del Norte

manuel.olivares@ucn.cl

jgallardo@ucn.cl

RESUMEN

En este artículo, se presenta un método para la obtención de la función de transferencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI), de entrada y salida única (SISO), a partir de su definición matemática. Se muestra el modelamiento matemático para sistemas de primer y segundo orden. Posteriormente, se explica el método para obtener la función de transferencia utilizando una señal escalón unitario como entrada. Se define el problema de minimización del error cuadrático medio entre la señal de salida del sistema a modelar y la que señal entregada por los modelos. Se realiza una descripción del procedimiento, para evaluar el ajuste de las funciones de transferencia obtenidas, mediante un caso de estudio realizado en MATLAB. Los resultados muestran que en muchos de los casos, la función de transferencia desconocida, puede ser representada por más de un modelo en forma eficaz, con un error que no supera $5 \cdot 10^{-3}$.

Palabras clave: Sistemas de Control, Función de Transferencia, Estimación Paramétrica.

ABSTRACT

This article describes a method to get a transfer function for a time-invariant linear system (LTI) with a single-input and single-output (SISO) from the mathematical definition. The mathematical modeling for first and second order systems is presented. Furthermore, the method to get the transfer function is explained using a unit step signal as input to system. The problem of minimizing the mean square error between the reference output signal and the model is defined. The procedure followed to test the effectiveness of the functions is described through a case study using the math and engineering software MATLAB. The results show that in many cases, unknown function reference, can be represented by more than one model effectively with an error not exceeding $5 \cdot 10^{-3}$ units.

Keywords: Control Systems, Transfer Function, Parameter Estimation.

1. INTRODUCCIÓN

Un sistema SISO (Single Input Single Output), es una abstracción de un sistema complejo que se caracteriza por un comportamiento de "caja negra", generando una señal de salida característica en respuesta a una señal de entrada concreta. La Figura 1 muestra un esquema de sistema SISO, donde a partir de una señal de entrada $u(t)$ se genera una señal de salida $y(t)$.

Cuando se conoce el detalle que contiene esta caja negra, es posible obtener un modelo matemático basado en ecuaciones diferenciales, y de esta manera se puede obtener una expresión para la señal de salida. Este detalle interno, puede considerar un circuito eléctrico, un sistema dinámico de fuerzas, un proceso industrial, entre otros.

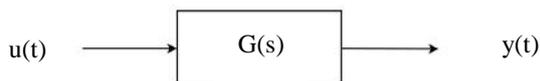


Figura 1. Sistema SISO.

Por otra parte, en muchas ocasiones no se tiene acceso al detalle interno de un sistema, y es por esto que se hace necesario recurrir a métodos de identificación. La Identificación de Sistemas, trata el problema de construir modelos matemáticos de Sistemas Dinámicos, a partir de datos obtenidos del propio sistema [1][2]. Estos métodos, consideran una entrada concreta al sistema para analizar la salida, y obtener un modelo adecuado para el sistema en cuestión.

Los métodos de identificación se clasifican en dos grandes grupos: paramétricos y no paramétricos [2]. Los métodos paramétricos [3], utilizan un modelo matemático de base, que mediante la variación de sus parámetros, hace posible ajustar un modelo a la señal de salida del sistema. Por otra parte, los modelos no paramétricos [4] son aquellos que mediante una tabla o gráfico permiten caracterizar el sistema [2].

En particular, la identificación tanto paramétrica como no paramétrica tiene como objetivo común determinar la función de transferencia del sistema. Una función de

transferencia es la relación que existe entre la señal de la entrada y la señal salida en el dominio de la frecuencia [5]. En términos matemáticos, se representa mediante la transformada de Laplace, tal como se muestra en la ecuación (1).

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} \quad (1)$$

Una vez obtenida la función de transferencia, la dinámica del sistema queda totalmente determinada, y se puede emplear para analizar el comportamiento del sistema en un ambiente de simulación.

En el campo de sistemas de control se puede encontrar gran variedad de propuestas de solución a la temática de identificación, tanto paramétricos como no paramétricos [6], [7], [8], [9] y [10]. Por otra parte, las redes neuronales artificiales [11] también son ampliamente usadas mediante diferentes topologías que permiten elaborar modelos capaces de determinar los parámetros tanto de sistemas lineales como no lineales.

En este artículo, se presenta una forma sistemática de obtener funciones de transferencia para un sistema SISO LTI desconocido, mediante la aplicación de su definición matemática general, para sistemas de primer y segundo orden. Posteriormente, se presenta una comparación de los resultados en función al error obtenido con respecto al sistema original de referencia.

2. MODELAMIENTO MATEMÁTICO

Un sistema SISO LTI (Linear Time-Invariant), es un sistema que satisface el principio de superposición e invariabilidad en el tiempo. La dinámica se modela con ecuaciones compuestas por las derivadas de la señal de salida con respecto al tiempo. Estas son de primer orden si incluyen primeras derivadas y de segundo orden si además incorporan segundas derivadas. En particular, las ecuaciones de un sistema LTI son lineales e invariantes en el tiempo.

En general, un sistema de primer orden se describe mediante la ecuación (2), donde representa la constante de tiempo del sistema y la ganancia del proceso [5].

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k u(t) \quad (2)$$

Aplicando transformada de Laplace en (2), y suponiendo que: no hay desviación en el tiempo por causa de tiempos muertos ($y(0) = 0$) y que la frecuencia natural es $\omega_n = 1/\tau$, se obtiene la expresión (3). Esta expresión representa la función de transferencia general para sistemas de primer orden SISO LTI, caracterizado por la ganancia k y la frecuencia natural ω_n .

$$L\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + L\{y(t)\} = kL\{u(t)\}$$

$$\tau(sY(s) - y(0)) + Y(s) = kU(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{\tau s + 1}$$

$$G(s) = \frac{k}{s + \omega_n} \quad (3)$$

Por otra parte, un sistema de segundo orden se describe mediante la ecuación diferencial (4) donde ξ es el factor de amortiguamiento.

$$\tau^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi \tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k u(t) \quad (4)$$

Nuevamente, aplicando transformada de Laplace y suponiendo que no hay desviación en el tiempo, $y(0) = 0$, $dy(0)/dt = 0$, se obtiene la expresión (5).

$$\tau^2 L\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + 2\xi \tau L\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + L\{y(t)\} = kL\{u(t)\}$$

$$\tau^2(s^2Y(s) - sy(0) - \frac{dy(0)}{dt}) + 2\xi \tau(sY(s) - y(0)) + Y(s) = kU(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{\tau^2 s^2 + 2\xi \tau s + 1}$$

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} \quad (5)$$

La ecuación (5) presenta la función de transferencia general para sistemas de segundo orden SISO LTI, caracterizado por la ganancia k , la frecuencia natural ω_n y el factor de amortiguamiento ξ . En particular, tomando el denominador de la ecuación (5) y resolviendo la expresión de segundo grado, se obtienen los polos (6).

$$p_{1,2} = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (6)$$

La ecuación (6) plantea la posibilidad que el argumento de la raíz cuadrada sea cero con $\xi = 1$, positivo con $\xi > 0$, o negativo con $\xi < 0$. En el primer caso, se obtienen dos polos reales iguales, dando lugar a un sistema de segundo orden críticamente amortiguado. En el segundo caso, se obtienen dos polos reales distintos, lo que describe a un sistema de segundo orden sobre-amortiguado. Finalmente, en el tercer caso se obtienen dos polos complejos conjugados, lo que da origen a un sistema de segundo orden sub-amortiguado.

3. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

En un sistema SISO LTI desconocido, es posible obtener la función de transferencia aplicando una señal de entrada conocida y analizando el tipo de curva de la señal de salida. Los sistemas de primer y segundo orden tienen una curva característica (Figura 2 y 3) determinada por los parámetros τ y ξ . La señal de entrada al sistema, puede ser una señal escalón, rampa, sinusoidal, entre otras. Por otra parte, la función de transferencia es única, por lo tanto no depende de la señal de entrada empleada. De esta manera, y por simplicidad, se empleará una función escalón unitario como entrada al sistema, y de esta manera se obtendrán datos de salida. Finalmente, mediante un método de ajuste paramétrico se obtendrá una expresión para la función de transferencia.

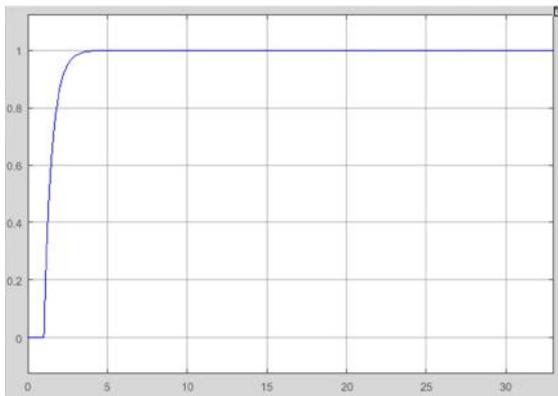


Figura 2. Salida sistema de primer orden.

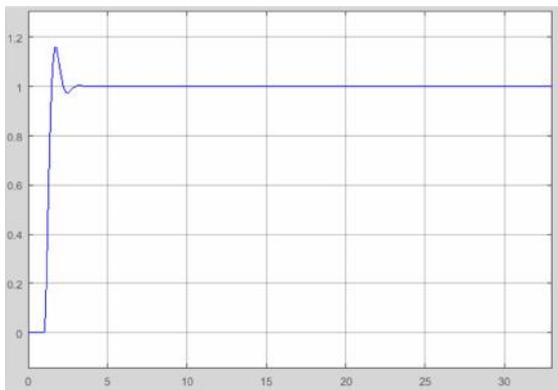


Figura 3. Salida sistema de segundo orden sub-amortiguado.

Modelo para la función de salida

Para un sistema de primer orden, la solución a la ecuación diferencial (2) se obtiene utilizando su función de transferencia (3), la señal escalón unitario (7) y la transformada inversa de Laplace, con lo cual se obtiene la expresión (8).

$$u(t) = \begin{cases} 1 & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$Y(s) = \frac{k\omega}{s(s+a)}$$

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{k\omega}{s(s+a)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega}{s(s+a)} \right\}$$

$$y(t) = k\omega \left(1 - e^{-at} \right) p(-t) \quad (8)$$

Para un sistema de segundo orden, la solución a la ecuación diferencial (4) se obtiene de manera similar a la anterior.

$$Y(s) = \frac{k\omega}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k\omega}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \right\}$$

Para obtener la salida y(t) es necesario tomar en cuenta los tres posibles valores que puede tomar el coeficiente de amortiguamiento: $\zeta = 1$, $\zeta > 1$ y $\zeta < 1$.

En el caso que el sistema sea sobre-amortiguado ($\zeta > 1$) existen dos polos reales diferentes p_1 y p_2 .

$$p_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Tomando $p_1 = -\omega_1$ y $p_2 = -\omega_2$.

$$\omega_1 = \zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\omega_2 = \zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Finalmente, la expresión de la salida se muestra en (9)

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[1 + \frac{\omega_2 \exp(-\omega_1 t) - \omega_1 \exp(-\omega_2 t)}{\omega_1 - \omega_2} \right] \quad (9)$$

En el caso que el sistema sea críticamente amortiguado ($\zeta = 1$) entonces existen dos polos reales iguales p_i .

$$p_1 = p_2 = -\zeta\omega_n$$

Tomado $p_i = -\zeta\omega_n$, entonces:

$$p_1 = p_2 = -\zeta\omega_n$$

De esta manera, la salida queda determinada por la expresión (10).

$$y(t) = k[1 - (1 + t)\exp(-\zeta\omega_n t)] \quad (10)$$

Finalmente, en el caso que el sistema sea subamortiguado ($\zeta < 1$), existen dos polos complejos conjugados p_1 y p_2 .

$$p_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

En este caso la solución se presenta en (11).

$$y(t) = k \left[1 - \left(\frac{\exp(-\zeta\omega_n t)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \text{seno}(\omega_d t + \phi) \right] \quad (11)$$

Donde:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$$

Ajuste de la curva de salida

Todas las ecuaciones descritas en la sección anterior, tienen en común los parámetros ω_n y ζ , por lo tanto es posible ajustarlos a los datos de la señal de salida. De estos parámetros, los más relevantes son ω_n y ζ , dado que caracterizan completamente la forma de la función de salida. Por otra parte, el parámetro k , solo amplifica la señal. Por lo

tanto, considerando que la señal de entrada es un escalón unitario, podemos prescindir del parámetro k y centrar el ajuste en ω_n y ζ . De esta manera, el problema se puede expresar como se muestra en (12).

$$\text{MIN}_{\omega_n, \zeta} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \right] \quad (12)$$

Donde:

$$y_i = \text{out}[t_i], i \in \mathbb{Z}$$

$$\hat{y}_i = \text{Modelo}(\omega_n, \zeta)$$

$$t_i = \text{out}[t_i], i \in \mathbb{Z}$$

$$\omega_n > 0, \zeta > 0, \zeta \in \mathbb{R}$$

La ecuación (12) expresa el problema de minimizar el error cuadrático medio (ECM) entre la señal de salida y_i y el valor estimado por el modelo \hat{y}_i , variando los parámetros ω_n y ζ .

El vector out , contiene el conjunto de datos obtenidos a la salida del sistema. Por su parte, tout contiene los tiempos en que se tomaron cada uno de los datos respectivamente.

En el caso de un sistema de primer orden, no se utiliza el parámetro ζ , por lo cual el modelo para i se expresa como indica la expresión (13).

$$\hat{y}_i = \text{Modelo}(\omega_n, \zeta) \quad (13)$$

Este problema se puede resolver fácilmente utilizando software de optimización especializado, mediante programación lineal u algún otro.

Una vez obtenidos los parámetros ajustados, éstos se reemplazan en las expresiones (3) y (5) para obtener las funciones de transferencias respectivas.

4. CASO DE ESTUDIO

Para simular un sistema SISO LTI se utilizó el software de Matemática e Ingeniería

MATLAB, en el cuál se definió una función de transferencia particular, se aplicó una señal escalón unitario y se obtuvo un conjunto de datos de salida. La Figura 4 muestra el sistema SISO empleado, donde a partir de una señal de escalón unitario se genera una señal de salida que se almacena en un vector llamado "out".



Figura 4. Obtención de datos de salida.

Una vez que los datos están disponibles, se utiliza un script programado en lenguaje m que resuelve el problema de optimización. La razón del por qué programar un script, en vez de utilizar una herramienta existente, se debe a dos razones principales: 1) tener control sobre el procedimiento de optimización y 2) aprovechar la potencia de MATLAB en el manejo de matrices y su interacción con el ambiente de simulación Simulink.

La Tabla 1 muestra el detalle de la salida del script, donde aparecen calculadas las funciones de transferencia G1, G2, G3 y G4, que corresponden al sistema de primer orden, segundo orden sobre-amortiguado, segundo orden críticamente amortiguado y segundo orden sub-amortiguado.

Luego de obtener el ajuste, las funciones G1, G2, G3 y G4 se cargan automáticamente en el modelo de prueba creado en Simulink (Figura 5) para medir el error cuadrático medio. El esquema de la Figura 5, muestra el sistema original (en negro) y cuatro bloques en paralelo que contienen las funciones de transferencia.

El error cuadrático medio de la curva que mejor se ajusta, es del orden de 2×10^{-32} [U²] (unidades cuadradas) en promedio. Por otra parte, la que menos se ajusta, en promedio, presenta un error de $3,8 \times 10^{-3}$ [U²].

En base a la información entregada por las gráficas de las Figuras 7, 8, 9, 10, 11, 12 y 13, donde la línea azul corresponde a la salida del sistema original y la roja a la salida estimada por los modelos; se hace evidente

que el modelo que mejor describe el sistema objetivo corresponde al de segundo orden subamortiguado, reportando un error del orden 10^{-32} . En los otros casos, visualmente los modelos no presentan el ajuste esperado, en particular en el "peak" oscilante sobre el nivel de referencia, por lo tanto no des criben correctamente la dinámica del sistema y deben ser descartados.

Tabla 1. Salida del scrip de ajuste.

```
>> ident
1) Eliminando tiempo muerto
2) modelo de primer orden
G1 =
    3.5
-----
    s + 3.5
Continuous-time transfer function.

3) modelo de segundo orden
sobre-amortiguado
G2 =
    64
-----
    s^2 + 17.6 s + 64
Continuous-time transfer function.

4) modelo de segundo orden críticamente
amortiguado
G3 =
    54.76
-----
    s^2 + 14.8 s + 54.76
Continuous-time transfer function.
```

5) modelo de segundo orden subamortiguado

$$G4 = \frac{25}{s^2 + 5s + 25}$$

Continuous-time transfer function.

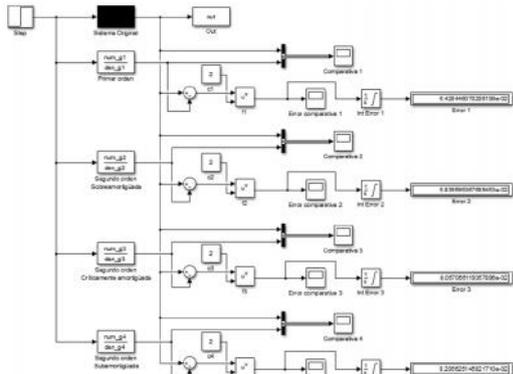


Figura 5. Modelo Simulink.

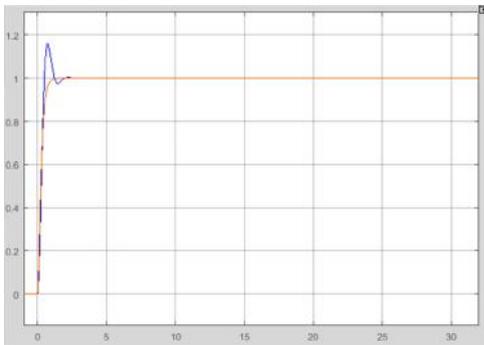


Figura 6. Salida del modelo utilizando G1.

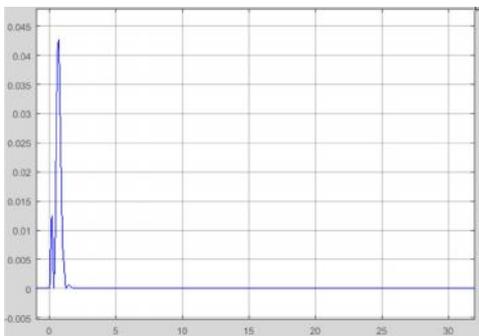


Figura 7. Error utilizando G1.

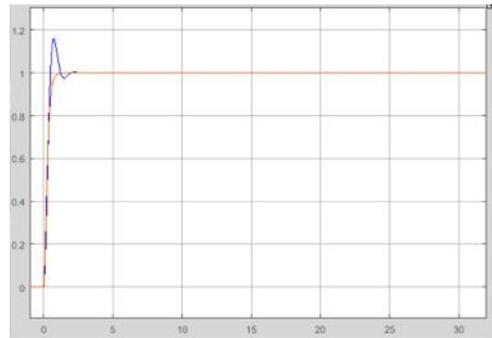


Figura 8. Salida del modelo utilizando G2.



Figura 9. Error utilizando G2.

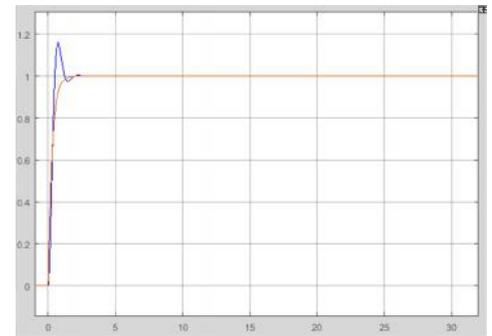


Figura 10. Salida del modelo utilizando G3.

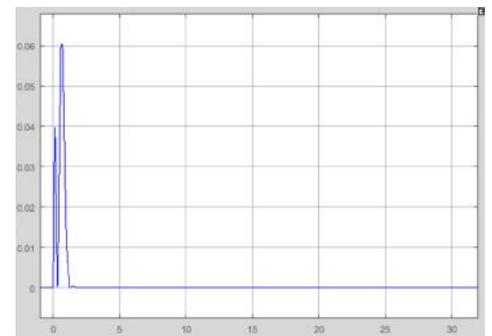


Figura 11. Error utilizando G3.

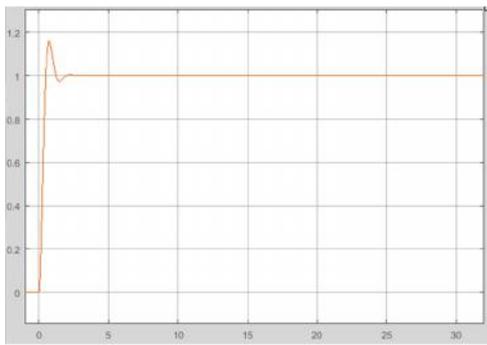


Figura 12. Salida del modelo utilizando G4 (mejor ajuste).

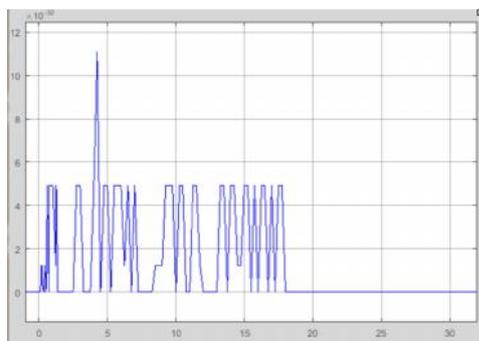


Figura 13. Error utilizando G4.

5. CONCLUSIONES

El trabajo presentado aporta un método concreto capaz de llevar a la práctica la formulación teórica de la identificación de sistemas SISO LTI. El carácter pedagógico de la propuesta, permite su implementación en prácticamente cualquier lenguaje de programación. En particular, el uso de Matlab y Simulink permiten realizar de manera simple una validación de los modelos y sus ajustes mediante la comparación de su error cuadrático medio con respecto a la respuesta del sistema original.

Un aspecto que no aparece en forma explícita en el trabajo presentado, corresponde a la presencia de tiempos muertos en la señal de salida. Este fenómeno, ocurre cuando la señal de salida característica del sistema está desplazada en el tiempo. Si bien, por simplicidad, este aspecto fue excluido del modelo matemático, los datos obtenidos en Simulink presentaron un tiempo muerto de un segundo. En un principio, el desconocimiento de este hecho dificultó el proceso de ajuste. Para resolver el

inconveniente, se incorporó un fragmento de código al inicio del script que eliminó el problema desplazando la señal al origen. Luego de esto, el sistema proporcionó un ajuste satisfactorio.

En base a los resultados, el peor ajuste obtenido es del orden de $3 \cdot 10^{-3}$, lo que se podría considerar un error pequeño. De acuerdo a esto, un sistema desconocido podría modelarse tanto por un modelo de primer o segundo grado. En particular, esto se vuelve útil para sistemas sobre-amortiguados o críticamente amortiguados, los cuales podrían ser modelados por un sistema de primer orden. En el caso de un sistema sub-amortiguado no es conveniente esta simplificación, dado que no alcanza a capturar el sobre impulso característico.

6. REFERENCIAS

- [1] K. Astrom, P. Eykhoff. "System identification - a survey". *Automatica*, 1971, vol. 7, no 2, p. 123-162.
- [2] Vallejo, E. (1997). Identificación paramétrica de sistemas dinámicos. Ingeniería y Desarrollo.
- [3] R. King, P. Paraskevopoulos. "Parametric identification of discrete-time SISO systems". *International Journal of Control*, 1979, vol. 30, no 6, p. 1023-1029.
- [4] J. Schoukens, Y. Rolain, R. Pintelon. "On the use of parametric and non-parametric noise-models in time-and frequency domain system identification". In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. IEEE, 2010. p. 316-321.
- [5] Ogata, K. (2003). Ingeniería de control moderna. Pearson Educación.
- [6] F. Ikhouane, F. Giri. "A unified approach for the parametric identification of SISO/MIMO Wiener and Hammerstein systems". *Journal of the Franklin Institute*, 2014, vol. 351, no 3, p. 1717-1727.
- [7] M. Spiridonakos, A. Poulimenos, S. Fassois. "Output-only identification and dynamic analysis of time-varying mechanical structures under random excitation: a comparative assessment of parametric methods". *Journal of Sound*

and Vibration, 2010, vol. 329, no 7, p. 768-785.

[8] J. Herrera, A. Ibeas, S. Alcántara, M. de la Sen, S. Serna-Garcés. "Identification and control of delayed SISO systems through pattern search methods". Journal of the Franklin Institute, 2013, vol. 350, no 10, p. 3128-3148.

[9] J. De Caigny, J. Camino, J. Swevers. "Interpolating model identification for SISO linear parameter-varying systems". Mechanical Systems and Signal Processing, 2009, vol. 23, no 8, p. 2395-2417.

[10] López, M. E. (2002). Identificación de Sistemas. Aplicación al modelado de un motor de continua.

[11] T. Tutunni. "Parametric system identification using neural networks". Applied Soft Computing, 2016.