REVISTA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA

www.revistaingenieria.uda.cl

34 (2018) 1-6

LA GH-DERIVADA DE DOS FUNCIONES FUZZY

Iván Aguirre Cipe
Departamento de Matemáticas, Universidad de Tarapacá, Arica - Chile

RESUMEN

En este artículo demostramos que la suma de dos funciones fuzzy gH-diferenciables no necesariamente es gH-diferenciable, existen resultados de este tópico en la literatura que no son correctos.

Palabras Claves: Funciones fuzzy, funciones gH-diferenciales, conjuntos fuzzy,

ABSTRACT

In this article we show that the sum of two fuzzy gH-differentiable functions is not necessarily gH-differentiable, there are results of this topic in the literature that are not correct.

Keywords: Fuzzy functions, gH-differentiable function, fuzzy sets.

1. Preliminar

Definición 1. Consideremos un conjunto universo X. Un conjunto fuzzy de X es una función $\mu: X \to [0,1]$. Esta función $\mu(\cdot)$, (llamada también función de pertenencia), representa el grado de pertenencia de x al conjunto fuzzy μ , donde los grados de pertenencia 0 y 1, representan la no pertenencia y la pertenencia total del elemento al conjunto fuzzy, mientras que $0 < \mu < 1$ representa la pertenencia parcial del elemento al conjunto fuzzy.

La función de pertenencia $\mu(\cdot)$ caracteriza completamente al conjunto fuzzy μ.

Para buscar una relación entre las propiedades que ya conocemos y los conjuntos fuzzy, se definen los α-nivel de μ.

Definición 2. Sea $\mu: X \to [0,1]$ un conjunto fuzzy, entonces el α-nivel de μ es definido como

$$[\mu]^\alpha = \{x \in X / \mu(x) \geq \alpha\}$$

con $0 < \alpha \leq 1$. Para $\alpha = 0$ tenemos que, $[\mu]^0$ es la clausura del conjunto $\{x \in X / \mu(x) > 0\}$, es decir

$$[\mu]^0 = supp(\mu) = \overline{\{x \in X / \mu(x) > 0\}},$$

llamado el soporte de μ.

Definición 3. Dado un conjunto fuzzy μ en R^n, consideremos las siguientes definiciones
μ es compacto si $[\mu]^\alpha$ es compacto para todo $\alpha \in [0,1]$.

μ es convexo si $[\mu]^\alpha$ es convexo para todo $\alpha \in [0,1]$.

μ es Lipschitz si existe $k > 0$ tal que $|\mu(x) - \mu(y)| \leq k\|x - y\|$ para todos $x, y \in supp(\mu)$.

$[\mu]^1$ es llamado el núcleo de μ y es denotado por $Core(\mu) = [\mu]^1$.

Denotaremos por $F(R^n)$ al espacio de los conjuntos fuzzy compactos en R^n y por $F_C(R^n)$ al espacio de los conjuntos fuzzy compactos y convexo en R^n.

Entre los distintos conjuntos fuzzy, que son definidos en un conjunto universo, existen conjuntos fuzzy definidos en el conjunto de los números reales y que cumplen ciertas propiedades y son llamados intervalos fuzzy, es un concepto importante en la modelación de ciertos fenómenos, en el análisis matemático fuzzy y sus aplicaciones.

Definición 4. Si $\mu \in F_C(R)$ diremos que μ es un intervalo fuzzy.

Si $\mu \in F_C(R)$ entonces tenemos que los niveles son intervalos cerrados y acotados el cual denotamos por

$[\mu]^\alpha = \left[\underline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\alpha\right]$ para todo $\alpha \in [0,1]$.

A seguir tenemos una caracterización de intervalos fuzzy.

Teorema 1 [4] Sea $\mu: R \to [0,1]$ un conjunto fuzzy. μ es un intervalo fuzzy si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:

μ es normal, es decir, existe $x_0 \in R$ tal que $\mu(x_0) = 1$.

μ es convexo fuzzy, es decir, $\mu(tx + (1-t)y) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}$, $\forall t \in [0,1]$, $x, y \in R$.

μ es semicontinua superiormente en R, es decir, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $\mu(x) - \mu(x_0) < \varepsilon$ si $|x - x_0| < \delta$.

μ es de soporte compacto, es decir, la clausura del conjunto $\{x \in X / \mu(x) > 0\}$, denotado por $\overline{\{x \in X / \mu(x) > 0\}}$, es compacto.

En vez de escribir $F_C(R)$ escribiremos simplemente F_C.

Los intervalos fuzzy triangulares son tipos especiales de intervalos fuzzy que están bien determinados por tres números reales $a \leq b \leq c$. Escribiremos $\tilde{b} = (a, b, c)$ que denota un intervalo fuzzy $\tilde{b}$ con núcleo o 1-nivel dado por el singleton $\{b\}$ y los α-niveles son

$$\left[\tilde{b}\right]^\alpha = [a + (b-a)\alpha, c - (c-b)\alpha] \text{ , } \forall \alpha \in [0,1].$$

Un caso particular de intervalo fuzzy triangular son los números $a \in R$ con función de pertenencia dada por χ_a, donde χ_A es la función característica del conjunto A. Considerando la función característica de un intervalo cualquiera $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ es un intervalo fuzzy tal que $[\chi_A]^\alpha = A$ para todo $\alpha \in [0,1]$.

Para los intervalos fuzzy, $u, v \in F_C$, representado por $[\underline{u}_\alpha, \overline{u}_\alpha]$ y $[\underline{v}_\alpha, \overline{v}_\alpha]$ respectivamente, y para cualquier número real λ, se define la adición $u + v$ y la multiplicación por escalar λu como sigue

$$(u + v)(x) = \sup_{y+z=x} \{u(y), v(z)\},$$

$$(\lambda u)(x) = \begin{cases} u\left(\frac{x}{\lambda}\right) & si\, \lambda \neq 0, \\ 0 & si\ \ \lambda = 0. \end{cases}$$

Sabemos que, para todo $\alpha \in [0,1]$,

$[u + v]^\alpha = \left[\left(\underline{u + v}\right)_\alpha, \left(\overline{u + v}\right)_\alpha\right] = [\underline{u}_\alpha + \underline{v}_\alpha, \overline{u}_\alpha + \overline{v}_\alpha]$, (1)

y

$[\lambda u]^\alpha = \left[\left(\underline{\lambda u}\right)_\alpha, \left(\overline{\lambda u}\right)_\alpha\right] = \lambda[u]^\alpha = \lambda[\underline{u}_\alpha, \overline{u}_\alpha] = [mín\{\lambda \underline{u}_\alpha, \lambda \overline{u}_\alpha\}, máx\{\lambda \underline{u}_\alpha, \lambda \overline{u}_\alpha\}]$. (2)

Dados $u, v \in F_C$, se define la distancia entre $u\, y\, v$ por

$D(u, v) = \sup_{\alpha \in [0,1]} H([u]^\alpha, [v]^\alpha) = \sup_{\alpha \in [0,1]} máx\{|\underline{u}_\alpha - \underline{v}_\alpha|, |\overline{u}_\alpha - \overline{v}_\alpha|\}$.

Consideremos $\tilde{f}: R \to F_C$ una función fuzzy. Para cada $\alpha \in [0,1]$, denotamos por $\tilde{f}$ la familia de funciones con valores intervalos $\tilde{f}_\alpha: R \to K_C$ dada por $\tilde{f}_\alpha(x) = [\tilde{f}(x)]^\alpha$. Para cualquier $\alpha \in [0,1]$, denotamos

$$\tilde{f}_\alpha(x) = \left[\underline{f}_\alpha(x), \overline{f}_\alpha(x)\right] = \left[\underline{f}(\alpha, x), \overline{f}(\alpha, x)\right].$$

Para cada $\alpha \in [0,1]$, las funciones extremo $\underline{f}_\alpha, \overline{f}_\alpha: S \to R$ son llamadas funciones inferior e superior de $\tilde{f}$, respectivamente.

Un concepto fundamental para la obtención de una definición útil de derivada de funciones fuzzy, está una adecuada diferencia entre dos intervalos fuzzy. Con este fin tenemos la siguiente definición.

Definición 5. [6] Dados dos intervalos fuzzy $u\, y\, v$, la diferencia generalizada de Hukuhara (gH-diferencia) es el intervalo fuzzy w,

$$u \Theta_{gH} v = w \leftrightarrow \begin{cases} (i)\ \ u = v + w, \\ \quad\quad o \\ (ii)\ \ v = u + (-1)w. \end{cases}$$

Es fácil demostrar que $(i)\, y\, (ii)$ son ambos válidos si y solo si w es un un número crisp . Note que el caso (i) coincide con la diferencia de Hukuhara (ver [5]) y así la gH-diferencia es un concepto más general que la H-diferencia.

Si $u\Theta_{gH} v$ existe entonces, en términos del conjunto α-nivel, tenemos que

$[u\Theta_{gH} v]^\alpha = [u]^\alpha \Theta_{gH} [v]^\alpha = [mín\{\underline{u}_\alpha - \underline{v}_\alpha\}, máx\{\overline{u}_\alpha - \overline{v}_\alpha\}]$,

Para todo $\alpha \in [0,1]$, donde $[u]^\alpha \Theta_{gH} [v]^\alpha$ denota la gH-diferencia entre dos intervalos.

2. Función fuzzy gH-diferenciable

Ahora presentamos el concepto de funciones fuzzy gH-diferenciables basada en la gH-diferencia de intervalos fuzzy.

Definición 6. [1] La gH-derivada de una función fuzzy $\tilde{f}: T \to F_C$ en $x_0 \in T$ es definida como

$$\tilde{f}'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} [\tilde{f}(x_0 + h) \Theta_{gH} \tilde{f}(x_0)].$$

Si $\tilde{f}'(x_0) \in F_C$ existe, diremos que $\tilde{f}$ es generalizada Hukuhara diferenciable (gH-diferenciable) en x_0.

Notemos que basados en la gH-diferencia de intervalos, el concepto de gH-diferenciabilidad para funciones con valores intervalos es introducido en [7].

En esta sección, estamos interesados en la relación entre la gH-diferenciabilidad de una función fuzzy $\tilde{f}$ y la gH-diferenciabilidad de la familia de funciones con valores intervalos $\tilde{f}_\alpha$. También estamos interesados en la conexión entre la gH-diferenciabilidad de una función fuzzy $\tilde{f}$ y la diferenciabilidad de las funciones extremo $\underline{f}_\alpha\, y\, \overline{f}_\alpha$ (ver [3], [2]).

Teorema 2 Si $\tilde{f}: T \to F_C$ es gH-diferenciable en $x_0 \in T$, entonces $\tilde{f}_\alpha$ es gH-diferenciable en x_0 uniformemente en $\alpha \in [0,1]$ y
$\tilde{f}'_\alpha(x_0) = [\tilde{f}'(x_0)]^\alpha$,
para todo $\alpha \in [0,1]$.

El siguiente ejemplo nos muestra que la recíproca del Teorema anterior no es válida.

Ejemplo 1. Sea $\tilde{f}: [0,1] \to F_C$ definida por los α-niveles como

$$[\tilde{f}(x)]^\alpha = \begin{cases} [1-x, 1+x] \; si\; \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \\ [0,1+x] \qquad si\; 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sea $x_0 \in (0,1)$, para cada $\alpha \in [0,1]$ tenemos que $\tilde{f}_\alpha$ es gH-diferenciable en x_0 uniformemente en $\alpha \in [0,1]$ y

$$\widetilde{f(x)}'_\alpha(x_0) = \begin{cases} [-1,1] \; si\; \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \\ [0,1] \;\; si\; 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Observamos que $\{\widetilde{f(x)}'_\alpha(x_0)\}_{\alpha\in[0,1]}$ no son los niveles de un intervalo fuzzy. Por lo tanto $\tilde{f}$ no es gH-diferenciable.
En general, tenemos el siguiente resultado que conecta la gH-diferenciabilidad de $\tilde{f}$ y la diferenciabilidad de las funciones extremos $\underline{f}_\alpha\, y\, \overline{f}_\alpha$.

Teorema 3 Sea $\tilde{f}: T \to F_C$ una función fuzzy. Si $\tilde{f}$ es gH-diferenciable en $x_0 \in T$ entonces uno de los siguientes casos se cumple:
$\underline{f}_\alpha\, y\, \overline{f}_\alpha$ son diferenciables en x_0, uniformemente en $\alpha \in [0,1]$ y

$[\tilde{f}'(x_0)]^\alpha =$
$\left[mín\left\{\left(\underline{f}_\alpha\right)'(x_0), \left(\overline{f}_\alpha\right)'(x_0)\right\}, máx\left\{\left(\underline{f}_\alpha\right)'(x_0), \left(\overline{f}_\alpha\right)'(x_0)\right\}\right]$
, $\forall\alpha \in [0,1]$;

$\left(\underline{f}_\alpha\right)'_-(x_0)$, $\left(\underline{f}_\alpha\right)'_+(x_0)$, $\left(\overline{f}_\alpha\right)'_-(x_0)$ y $\left(\overline{f}_\alpha\right)'_+(x_0)$ existe, uniformemente en $\alpha \in [0,1]$, y satisface

$\left(\underline{f}_\alpha\right)'_-(x_0) = \left(\overline{f}_\alpha\right)'_+(x_0)$ y $\left(\underline{f}_\alpha\right)'_+(x_0) = \left(\overline{f}_\alpha\right)'_-(x_0)$.

Además,

$[\tilde{f}'(x_0)]^\alpha$
$= \left[mín\left\{\left(\underline{f}_\alpha\right)'_-(x_0), \left(\overline{f}_\alpha\right)'_-(x_0)\right\}, máx\left\{\left(\underline{f}_\alpha\right)'_-(x_0), \left(\overline{f}_\alpha\right)'_-(x_0)\right\}\right]$

$=$
$\left[mín\left\{\left(\underline{f}_\alpha\right)'_+(x_0), \left(\overline{f}_\alpha\right)'_+(x_0)\right\}, máx\left\{\left(\underline{f}_\alpha\right)'_+(x_0), \left(\overline{f}_\alpha\right)'_+(x_0)\right\}\right]$,

$\forall\, \alpha \in [0,1]$.

En 2016 en [2] se da una nueva caracterización de la gH-derivada.

Teorema 4 Sea $\tilde{f}: T \to F_C$ una función fuzzy y $x \in T$. Entonces $\tilde{f}$ es gH-diferenciable en x si y solo si uno de los siguientes cuatro casos se cumple:

(a) $\underline{f}_\alpha\, y\, \overline{f}_\alpha$ son diferenciables en x, uniformemente en $\alpha \in [0,1]$, $\left(\underline{f}_\alpha\right)'(x)$ es monótona creciente y $\left(\overline{f}_\alpha\right)'(x)$ es monótona decreciente como funciones de α y $\left(\underline{f}_1\right)'(x) \leq \left(\overline{f}_1\right)'(x)$. En este caso

$$\tilde{f}'_\alpha(x) = \left[\left(\underline{f}_\alpha\right)'(x), \left(\overline{f}_\alpha\right)'(x)\right],$$

para todo $\alpha \in [0,1]$.

(b) $\underline{f}_\alpha\, y\, \overline{f}_\alpha$ son diferenciables en x, uniformemente en $\alpha \in [0,1]$, $\left(\underline{f}_\alpha\right)'(x)$ es monótona decreciente y $\left(\overline{f}_\alpha\right)'(x)$ es monótona creciente como funciones de α y $\left(\overline{f}_1\right)'(x) \leq \left(\underline{f}_1\right)'(x)$. En este caso

$$\tilde{f}'_\alpha(x) = \left[\left(\overline{f}_\alpha\right)'(x), \left(\underline{f}_\alpha\right)'(x)\right],$$

para todo $\alpha \in [0,1]$.

(c) $\left(\underline{f_\alpha}\right)'_{+/-}(x)$ y $\left(\overline{f}_\alpha\right)'_{+/-}(x)$ existen uniformemente en $\alpha \in [0,1]$, $\left(\underline{f_\alpha}\right)'_{+}(x) = \left(\overline{f}_\alpha\right)'_{-}(x)$ es monótona creciente y $\left(\overline{f}_\alpha\right)'_{+}(x) = \left(\underline{f_\alpha}\right)'_{-}(x)$ es monótona decreciente como función de α y $\left(\underline{f_1}\right)'_{+}(x) \leq \left(\overline{f}_1\right)'_{+}(x)$. En este caso

$$\tilde{f}'_\alpha(x) = \left[\left(\underline{f_\alpha}\right)'_{+}(x), \left(\overline{f}_\alpha\right)'_{+}(x)\right] = \left[\left(\overline{f}_\alpha\right)'_{-}(x), \left(\underline{f_\alpha}\right)'_{-}(x)\right],$$

para todo $\alpha \in [0,1]$.

(d) $\left(\underline{f_\alpha}\right)'_{+/-}(x)$ y $\left(\overline{f}_\alpha\right)'_{+/-}(x)$ existen uniformemente en $\alpha \in [0,1]$, $\left(\underline{f_\alpha}\right)'_{+}(x) = \left(\overline{f}_\alpha\right)'_{-}(x)$ es monótona decreciente y $\left(\overline{f}_\alpha\right)'_{+}(x) = \left(\underline{f_\alpha}\right)'_{-}(x)$ es monótona creciente como función de α y $\left(\overline{f}_1\right)'_{+}(x) \leq \left(\underline{f_1}\right)'_{+}(x)$. En este caso

$$\tilde{f}'_\alpha(x) = \left[\left(\overline{f}_\alpha\right)'_{+}(x), \left(\underline{f_\alpha}\right)'_{+}(x)\right] = \left[\left(\underline{f_\alpha}\right)'_{-}(x), \left(\overline{f}_\alpha\right)'_{-}(x)\right],$$

para todo $\alpha \in [0,1]$.

3. Suma de funciones gH-diferenciables

En esta sección veremos que la suma de funciones gH-diferenciables no es necesariamente gH-diferenciable.
Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2 Sean las funciones $f, g: (0,1) \to F_C$ definidas por

$f(x) = (0,1,2)x^2$ y $g(x) = (1,2,3)(1 - x^2)$,

Cuyos niveles son

$[f(x)]^\alpha = [\alpha x^2, (2 - \alpha)x^2]$ y
$[g(x)]^\alpha = [(\alpha + 1)(1 - x^2), (3 - \alpha)(1 - x^2)]$.

Calculando la gH-derivada tenemos

$[f'(x)]^\alpha = [2x\alpha, 4x(2 - \alpha)]$ y
$[g'(x)]^\alpha = [-2x(3 - \alpha), -2x(1+)]$.

Según el Teorema anterior f es (a)-gH-diferenciable y g es (b)-gH-diferenciable , por otro lado calculemos $f + g$

$$[(f + g)(x)]^\alpha = [\alpha + 1 - x^2, 3 - \alpha - x^2].$$

Por otro lado

$$[f'(x)]^\alpha + [g'(x)]^\alpha = [2x(2\alpha - 3), 6x(1 - \alpha)].$$

Podemos ver que los niveles

$$[(f + g)(x)]^\alpha \text{ y } [f'(x)]^\alpha + [g'(x)]^\alpha$$

son distintos.

Cuáles serán las condicione para que se cumpla la igualdad

Teorema 5 Sean $f, g: T \to F_C$ dos funciones fuzzy (a)-gH-diferenciable entonces $f + g$ es (a)-gH-diferenciable y además

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Demostración.

Sea $[(f + g)(x)]^\alpha = \left[\left(\underline{f + g}\right)_\alpha(x), \left(\overline{f + g}\right)_\alpha(x)\right]$ y supongamos que es (a)-gH-diferenciable, entonces

$$\begin{aligned}[(f + g)(x)]^\alpha &= \left[\left(\underline{f + g_\alpha}\right)'(x), \left(\overline{f + g_\alpha}\right)'(x)\right] \\ &= \left[\left(\underline{f_\alpha}\right)'(x) + \left(\underline{g_\alpha}\right)'(x), \left(\overline{f}_\alpha\right)'(x) + \left(\overline{g}_\alpha\right)'(x)\right] \\ &= \left[\left(\underline{f_\alpha}\right)'(x), \left(\overline{f}_\alpha\right)'(x)\right] + \left[\left(\underline{g_\alpha}\right)'(x), \left(\overline{g}_\alpha\right)'(x)\right] \\ &= [f'(x)]^\alpha + [g'(x)]^\alpha.\end{aligned}$$

4. Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por UTA-MAYOR 4743-19, Universidad de Tarapacá.

5. Referencias

[1] P. Diamond, P. E. Kloeden, Metric Spaces of Fuzzy Sets: theory and applications, World Scientific, Singapore, 1994.

[2] L. Stefanini, A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic, Fuzzy Sets and Systems 161 (2010) 1564-1584.

[3] M. Hukuhara, Intégration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe, Funkcial. Ekvac. 10 (1967) 205-223.

[4] B. Bede, S. G. Gal, Solutions of fuzzy differential equations based on generalized differentiability,

Communications in Mathematical Analysis 9 (2010) 22-41.

[5] L. Stefanini , B. Bede , Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations, Nonlinear Analysis 71 (2009) 1311-1328.

[6] Y. Chalco-Cano, A. Rufián Lizana , H. Román-Flores, M. D. Jiménez-Gamero, Calculus for interval-valued functions using generalized Hukuhara derivative and applications, Fuzzy Sets and Systems 219 (2013) 49-67.

[7] Y. Chalco-Cano, R. Rodríguez-López, M. D. Jiménez-Gamero, Characterizations of generalized differentiable fuzzy functions. Fuzzy Sets and Systems 295 (2016) 37-56.